동적 스택시스템의 설계와 성능분석

정 치 봉†

요 약

본 논문은 동적 자료구조의 확률론적 운영방식의 설계와 그 성능분석의 이론적 접근 방법을 제시한다. 즉 m개의 셀로서 구성된 일련의 연속된 블록에 두개의 스택을 할당하여 공유하는 시스템의 확률적 운용 방식의 효율성을 해석적 방법에 의한 성능분석을 통하여 그 결과를 제시한다. 특히 스택 원소의 삽입과 제거는 스택의 현재의 크기에 따라 빈도를 달리하는 방식을 제안한다. 따라서 두 스택의 충돌까지 스택조작 횟수의 평균과 분산등 통계적 특성을 회소 사건 확률 계산이론에 의하여 $m\to\infty$일 때 점근적 결과를 제시한다. 또한 유한상태기계, 컴퓨터 및 정보 시스템의 성능 분석에 응용할 수 있는 보다 일반적인 방법을 고찰한다.

On the Design and Performance Analysis of Dynamic Stack Systems

Chy-Bong Chung†

ABSTRACT

We propose a probabilistic design method and performance analysis in the area of dynamic data structures. We assign two stacks to a block which consists of m contiguous memory cells. Frequencies of delete and insert operations are not fixed, but depend on stack heights. We present various probabilistic schema and a rigorous performance analysis for a random memory allocation.Especially, stack coillision problem is studied and exponential increase of the mean . of collision time as $m\to\infty$ is showed. We also present general mathematical schema which can be applied to the performance problems of finite automata and other computer information systems.

1. 서 론

동적 자료구조 분야 및 여러 정보시스템의 성능 분석 방법에 Markov 확률 과정과 회소 사건 확률 계산이론이 응용되고 있다[4, 16]. 특히 Knuth[14]는 하나의 연속된 메모리 셀로 구성된 블록에 두개의 스택을 쓰는 모형을 최초로 제안하였다. 이 모형에 대한 성능분석 즉, 스택 충돌의 문제는 random walk 분야의 수학적 해석을 빌려 최초로 Yao[21]에 의하여 이루어 졌다. 그 후 80년대 후반에 Flajolet, Louchard, Schott 등에 의하여 실제 시스템에 가까운여러 모형이 확률 및 조합론 방법에 의하여 연구되어 왔다[8, 9, 17]. 따라서 안정된 동적자료구조의 설계에 대한 일반적인 접근 방법과 성능의 효율성을 보장하는 여러 가능한 분석 방법이 요구되고 기대되어 왔다.

한편 Markov Chain을 포함한 여러 확률 과정에 대하여 작은 확률을 갖는 사건에 대한 계산적 접근이 응용수학분야에서 1970년대 이후에 크게 발전해 왔다 [5, 10, 20]. Large deviation 또는 회소사건 확률계산으로 불리는 이 분야는 물리학의 상전이 현상,spin systems,전자의 polaron 문제, 통신 및 네트워크 시스템의 성능분석, text 및 화상 압축,Monte Carlo simulation estimations , noise' detections, photodiode Receivers의 비트 에러 확률계산등 여러 과학 및 공학 분야에 중요한 응용을 제시하여 왔다[2, 3, 6, 12, 15]. 앞으로 정보, 통신, 전자, 제어 분야의 여러 시스템에 대한 설계와 분석 문제에 다양하게 기여할 것이 예

* 이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 공모과제 연구비에 의하여 연구되었음.
† 종신회원 : 순천향대학교 수학과 조교수
논문접수 : 1995년 2월 9일, 심사완료 : 1995년 4월 25일

상된다.

본 논문은 지금까지 제안된 스택 모형을 일반화시키고, 성능 분석에 관련된 스택 충돌 문제의 표현과 희소사건 확률계산이론을 적용하기 위하여 수학적인 재구성을 통하여 계산적 방법을 제시한다. 2장에서 스택 모형의 유한 상태 기계 표현과 스택 조작에 의한 스택의 상태 전이를 Markov chain으로서 제시한다. 3장에서는 성능 분석을 위한 준비로 필요한 수학적 개념 및 도구들을 사용하여 Wentzell과 Freidlin이 제시한 정형화된 불연속 Markov chain을 구성한다. 4장에서는 3장에서 제시된 스택 모형에 관하여 Wentzell과 Freidlin의 희소사건 확률계산 방법에 의하여 스택의 크기가 커져감에 따라 스택충돌이 지수적으로 감소하는 성능 분석 결과를 제시한다. 5장에서는 random Hamiltonian dynamic system을 도입하여 경로적분의 최소값을 계산함으로써 스택충돌 시간의 점근적인 수치값을 계산한다.

2. 스택 시스템의 확률모형 설계

Knuth[8]는 m개의 메모리 셀이 나란히 연결된 블록의 양끝에 각각의 스택을 만들어 사용하는 모형을 최초로 제안하였다. Knuth의 스택 모형은 다음과 같이 유한 상태기계로 표현된다.

A=스택 조작을 나타내는 기호들의 집합.

$=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 여기서

$a_1=(1, 0)$, $a_3=(0, 1)$ 스택원소의 삽입을

$a_2=(-1, 0)$, $a_4-(0, 1)$ 스택원소의 제거를 의미한다.

Q_m=상태공간

$=\{(j, k)\in Z^2 : j\geq 0, k\geq 0, j+k\leq m\}$

시작상태$=(0, 0)=q_0$

Q_m=최종 상태들의 집합

$=\{(j, k)\in Q_m : j+k=m\}$

천이함수 $\theta : Q_m\times A\rightarrow Q_m$

$$(1)\quad \theta[\ (j,k), a\ ] = \begin{cases} (j+1, k) & , a=a_1 \\ (j-1, k) & , a=a_1 \\ (j, k+1) & , a=a_3 \\ (j, k-1) & , a=a_4 \end{cases}$$

단, 빈 스택에서 제거조작은 상태변화가 없는 것으로 가정하며, 최종 상태에서 더 이상의 스택 조작은 이루어지지 않는다.

Knuth는 본 시스템을 무작위로 동전던지기를 하는 것처럼 스택의 원소 조작이 시행되는 모형으로 구성하였다. 따라서 각각의 스택조작에 따라 $a_n\in A$, $n=1, 2, 3,\cdots$ $0<p<1/2$에 대하여

$$prob(a_n=a_1)=prob(a_n=a_3)=p$$

$$prob(a_n=a_2)=prob(a_n=a_4)=\frac{1}{2}-p$$

인 확률을 갖고 스택원소의 삽입과 삭제가 이루어지는 베르누이 독립 시행을 구성한다. 따라서 독립시행 a_n이 유한 상태 기계에서 작동하면 $q_i\in Q_m$을 i번째 시행후의 상태라 표시했을 때,

초기조건 : $prob(\theta(q_0, a_1)=q_1$
$=prob(q_1-q_0=a_1)$

반복과정 : $k\geq 1$
$prob(\theta(q_k, a_{k+1})=q_{k+1})$
$=prob(q_{k+1}-q_k=a_{k+1})$

로써 표현된다. 그러므로

$$\theta^{(m)}{}_0=q_0$$

$$q_1=\theta^{(m)}{}_1=\theta(\theta^{(m)}{}_0, a_1),$$

$$q_2=\theta^{(m)}{}_2=\theta(\theta^{(m)}{}_1, a_2),\ \text{이므로}$$

$\theta^{(m)}_{(k)}$, $k=1, 2, 3, \cdots$를 정의하면, Markov Chain이고, 복합 경계조건을 갖으며 아래의 천이확률을 갖는다 ; $0<p<\frac{1}{2}$에 대하여

$$(2)\quad prob(\theta_k^{(m)}=q'\ |\theta_{k-1}^{(m)}=q)$$
$$=prob(\theta_k^{(m)}-\theta_{k-1}^{(m)}=a_1)$$
$$=\begin{cases} p & \text{if}\ \ a_k=a_1 \\ \frac{1}{2}-p & \text{if}\ \ a_k=a_2 \\ p & \text{if}\ \ a_k=a_3 \\ \frac{1}{2}-p & \text{if}\ \ a_k=a_4 \end{cases}$$

본 시스템의 성능은 두 스택의 충돌에 관련된 문제이다. 스택원소의 삽입 또는 제거 조작을 계

속함에 따라서 $\theta^{(m)}_{(k)} \in Q^{*}{}_{m}$ 상태에 최초로 도달하는 사건의 발생이다. 그러므로 성능 분석에 요구되는 사항은

① $\theta^{(m)}_{(k)}$, $k=1, 2, \cdots$이 최종 상태 $Q^{*}{}_{m}$에 도달할 때까지 행한 스택 조작 횟수는 평균으로 몇 번인가?

② 스택이 충돌했을 때 최종 상태의 분포는 무엇인가?

③ 메모리블록의 크기 m이 무한히 커질 때 ①과 ②의 점근적 결과는 어떤 증가와 분포 양상을 보이는가?

이 세 가지로 압축될 수 있다. 최초의 스택 충돌시간은

로써 정의 된다. 따라서 η_m은 Markov time이고, 스택 충돌시 상태에 관한 $Q^{(m)}{}_{\eta_m}$의 분포와 $m\to\infty$일때 η_m의 평균의 점근적 증가양상이다. yao [18]는 $\frac{1}{4}<p<\frac{1}{2}$인 경우,

η_m의 평균$=O(m)$

η_m의 분산$=O(\sqrt{m})$

임을 보였다.

Flajolet[7]는 $0<p\leq\frac{1}{4}$ 인 실제모형에 가까운 경우에 대하여 조합론의 방법을 이용하여 연구하였다. 특히 $p=\frac{1}{4}$의 경우에,

η_m의 평균$=O(m^2)$

$Q_{\eta_m}{}^{(m)}$의 분포=2변수 theta분포

$Q_{\eta_m}{}^{(m)}=(Q_{\eta_m}{}^{(m,1)}, Q_{\eta_m}{}^{(m,2)})$으로 표시할 때,

$\max=(Q_{\eta_m}{}^{(m,1)}, Q_{\eta_m}{}^{(m,2)})$ 의 평균이 점근적으로 $0.67526m$임을 보였다.

특히 $0<p<\frac{1}{4}$인 경우의 충돌문제 및 성능분석은 확률론 및 조합론 그 어느 접근도 분석이 어려운 문제이다. Lounchard와 Schott은 이 경우에 η_m의 평균이 $O(\beta^m)$, $\beta=\frac{1}{2p}-1$ 임을 보임으로써 지수적 증가 사실을 보였다. 또한 최종상태의 분포는 점근적 균등분포임을 보임으로써, 메모리를 공유하는 본 스택 모형이 메모리를 1/2씩 고정 분할하여 사용하는 스택 모형보다 효율성이 높음을 재시하였다[17].

지금까지의 스택 모형은 스택에 누적된 원소들의 갯수에 독립적이고 같은 확률을 갖는 경우였다. 우리는 k번 스택 원소를 조작한 후 스택의 현상태 $\theta^{(m)}_{k}\in Q_m$에서 다음 천이 확률을 갖는 보다 일반화된 스택 모형을 제안한다.

$$(3)\qquad prob(\theta^{(m)}_{k}=q' \mid \theta^{(m)}_{k-1}=q)$$
$$=prob(q'-q=a)$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(1-g\left(\frac{q_1}{m}\right)\right) & ,a=a_1\\ \frac{1}{4}\left(1+g\left(\frac{q_1}{m}\right)\right) & ,a=a_2 or 0\\ \frac{1}{4}\left(1-g\left(\frac{q_2}{m}\right)\right) & ,a=a_3\\ \frac{1}{4}\left(1+g\left(\frac{q_2}{m}\right)\right) & ,a=a_4 or 0\end{cases}$$

여기서 $q=(q_1, q_2)$라 하면,

함수 $g[0, 1]\to[0, 1]$는 i) $g(0)=0$, ii) $x\in(0, 1]$이면 $g(x)>0$인 조건을 갖는 것을 가정한다. 우리는 함수 g를 적절히 택함으로써 여러 다양한 동적 스택 모형을 설계할 수 있다. 본 논문에서는 g가 단조 증가 함수인 경우를 다룸으로써 실제적인 모형에 가까운 분석을 한다.

끝으로 $g(x)\equiv1-4p, 0<p<\frac{1}{2}$ 인 상수 함수인 경우는 Knuth가 제시한 스택 모형임을 알 수 있다. 일반적인 경우는 불연속 함수 또는 미분가능한 연속인 함수 $g:[0, 1]\to[-1, 1]$로써 택할 수 있다. 또한 스택 충돌을 재어하기 위한 목적으로 계단형 함수를 생각할 수 있다. 또한 여기서 제시한 동일한 형의 스택을 여러개 동시에 사용하는 큰 규모의 병렬형 시스템을 고려 할 수 있으며 이와 유사한 시스템에 대하여 Fredman, Goldsmith, Purdom 등은 3스택 시스템, buddy systems의 성능분석을 연구하였다.

3. 스택 모형의 수학적 표현

$\theta^{(m)}_{(k)}$, $k=0, 1, 2, 3,\cdots$은 2장 식 (3)의 천이확률을 갖는 Markov chain이다. 뿐만 아니라 x축 y축

그리고 최종상태의 경계조건을 갖는다. $m\to\infty$일 때, $\theta_{(\cdot)}^{(m)}$이 정상 확률분포를 갖는다면 본 모형의 η_m의 평균을 구하는 문제와 깊은 관련을 가지고 있다. 본 모형의 충돌 문제를 해결하기 위하여 우리는 스케일링 방법에 의하여 수학적으로 동등한 Wentzell과 Freidlin이 제시한 정규화된 Markov chain 모형을 아래의 과정을 통하여 재구성 할 수 있다.

i) 상태 공간의 정규화 및 표기 ;

$$\Delta_m=\{(\frac{j}{m},\frac{k}{m}):(j,k)\in Q_m\}$$

최종 상태의 집합 $\Delta^{*}_m=\{\Delta_m : x_1+x_2=1\}$

$\bigcup_{m=1}^{\infty}\Delta_m$에서 이의 위상적으로 폐집합화 한 집합

$$\Delta=\{(x,x)\in I\!R^2 : x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_1+x_2\leq 1\}$$

ii) 상태공간 Δ_m에서 확률 과정 $\theta^{(m)(\cdot)}$을 정규화된 Markov chain $\theta^{(m)(\cdot)}$으로 재구성하며, 여기서 $\tilde{\theta}_{(k)}^{(m)}=\frac{1}{m}\theta_{(k)}^{(m)}$ $\quad k=0,1,2,3,\cdots$로써 정의한다.

iii) $\tilde{\theta}_{(\cdot)}^{(m)}$에서 시간 변수에 관하여 interpolation근사 방법에 의하여 연속 매개변수 $t\in[0,\infty)$를 갖는 Markov process $x_t^{(m)}$를 다음과 같이 정의한다.

$$x_t^{(m)}=\tilde{\theta}_{[tm]}^{(m)} \qquad t\geq 0.$$

따라서 $x_t^{(m)}$ $t=0,\frac{1}{m},\frac{2}{m},\cdots$에서 스택의 삽입, 제거 조작이 발생하며 사건의 결과에 따라 다음 상태 점으로 jump에 의한 불연속 이동을 한다. 이때 천이확률은 2장 식(3)으로부터

$$(4)\quad prob(x_{(t+1/m)}=x'\,|x_t^{(m)}=x)$$
$$=prob(x'-x=\frac{a}{m})$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-g(x_1)) & ,a=a_1\\ \frac{1}{4}(1+g(x_1)) & ,a=a_2\,or\,0\\ \frac{1}{4}(1-g(x_2)) & ,a=a_3\\ \frac{1}{4}(1+g(x_2)) & ,a=a_4\,or\,0\end{cases}$$

로써 주어진다. 여기서 함수 g는 미분가능하면서 단조증가하며 (3)에서 제안한 i)과 ii) 조건을 만족하는 함수이다.

iv) 각 점 $x\in\Delta$에 대하여 $T\Delta_x$를 x에서 Tangent space 그리고 $T^{*}\Delta_x$를 Cotangent space로 표시한다. 각 점 $x\in\Delta$에서 ξ_x를 적당한 확률 공간에서 치역을 $T\Delta_x$로 갖는 확률 벡터일 때, 이들의 모임 $\{\xi_x : x\in\Delta\}$를 random field라 부르고 정의한다. 여기서, Markov chain의 보다 일반화된 모델을제시하고, 본 모델을 적용하여 표현하면 다음과 같다. 각점 $x\in\Delta$에서 ξ_x가 다음 분포를 갖는다면,

$$(5)\quad prob(\xi_x=a)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1-g(x_1)) & a=a_1\\ \frac{1}{4}(1+g(x_1)) & a=a_2\,or\,0\\ \frac{1}{4}(1-g(x_2)) & a=a_3\\ \frac{1}{4}(1+g(x_2)) & a=a_4\,or\,0\end{cases}$$

식 (4)는 random field $\{\xi_x : x\in\Delta\}$와 식(5) 의하여 주어진 확률에 따라 아래 등식이 성립하고

$$(6)\quad prob(x_{(t+1/m)}^{(m)}=x'|x_t^{(m)}=x)$$
$$=prob(\xi_x=a)$$

i), ii), iii)의 단계를 거쳐 정의된 Markov과정과 수학적으로 동등한 $x_t^{(m)}$ $t\geq 0$가 직접 정의된다.

v) 식 (4) 또는 (6)의 조건부 확률을$P_{t,x}^{(m)}$ 으로 표시하면, Wentzell과 Freidlin이 Markov process를 정형화한 표현 $(x_t^{(m)},P_{t,x}^{(m)})$, $t\geq 0$ $x\in\Delta$를 얻는다. 표본 경로(trajectories)들 전체에 대한 확률 표본 공간의 정준표현에 관하여는 표준적인 여러 참고서들이 있다[5, 10, 20]. 따라서 의미가 분명할 때는 $x_{(t)}^{(m)}$를 한 표본경로를 표기하며, 정준확률 표본 공간의 확률척도를$P^{(m)}$ 으로 표기한다.

vi) 우리는 임의의 스택조작 단위시간 t_0를 갖는 경우에 대하여 $t_0=1/cm$, m=스택의 크기 c=

특정한 상수를 고려함으로서 특정한 시스템에 관하여 적합한 스택조작 간격을 표현을 할 수 있다.

4. 희소사건 확률 계산에 의한 분석

Wentzell과 Freidlin은 불연속적인 표본경로를 갖는 보다 일반적인 Markov 확률과정에 대하여 적용할 수 있는 희소사건 확률계산방법을 제시하였다[10, 20]. 이 계산기법의 직관적인 의미는, $x_0 \in \Delta$가 확률 과정$x_t^{(m)}$, $t=0$, $m=1, 2, 3, \cdots$의 유일한 평형 상태라면 random vector field $E\xi_x$는 $x_0 \in \Delta$를 유인점(attractor)으로 갖게 된다. 따라서 $m \to \infty$일 때, 확률 과정 $x_t^{(m)}$ 는 Δ 외부로 벗어나는 사건은 점점 희소해진다. Wentzell과 Freodlin은 이러한 희소사건의 확률이 지수적으로 감소하는 경우에 관한 계산방법을 제시해 보였다. 따라서 본 스택모형을 분석하기 위하여, Wentzell과 Freidlin의 희소사건 확률계산방법과 (3)장에서 재구성한 모형에 적용시켜 분석한다. 따라서 본 장에서 $x_t^{(m)}$, $t \geq 0$, $m=1, 2, 3, \cdots$는 (3)장에서 정의된 Markov 과정이다.

성능 분석은 다음 mean drift vector field $E\xi_x$에 의한 다음 동역학계로부터 시작한다.

$$(7) \begin{cases} x = E\xi_x \ , x \in \Delta \ , t > 0 \\ x(0) = (0, 0) \ , t = 0 \end{cases}$$

따라서 식 (5)로부터, 다음 식을 얻는다.

$$E\xi_x = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(-g(x_1), -g(x_2)), & x\text{가 } \Delta\text{의 내점} \\ \frac{1}{4}\,(1-g(x_1), -2g(x_2)), & x\text{가 수직축점} \\ \frac{1}{4}\,(-2g(x_1), 1-g(x_2)), & x\text{가 수평축점} \end{cases}$$

$E\xi_x = 0$는 유일한 해(0, 0)를 평형점으로 갖으며, 따라서 (0, 0)는 동역학계 (7)의 유인점이다.

각 $m=1, 2, 3, \cdots$에 대하여

$$(8) \quad H_{(x,p)}^{(m)} = m \log E e^{(1/m)p \cdot \xi_x}$$

로써 정의된다. 여기서 $p \cdot \xi_x$ 두 벡터의 내적을 의미한다.

각 $m=1, 2, 3, \cdots$에 대하여 $(x_t^{(m)}, P_{t,x}^{(m)})$의 Hamilton함수는, Legendre변환에 의하여, 아래의 Largrange함수를 정의한다.

$$(9) \quad L_{(x,u)}^{(m)} = \sup_{p \in IR^2} [\ u \cdot p - H_{(x,p)}^{(m)}]$$

뿐만아니라, 동역학계 (7)의 Wentzell과 Freidlin의 Hamilton함수와 Lagrange함수는

$$(10) \quad H(x, p) = \log E e^{p\xi_x}$$

$$L(x, u) = \sup_{p} [\ u \cdot p - H(x, p)]$$

로써 정의하고, $H^{(m)}(\cdot, \cdot)$과 $L^{(m)}(\cdot, \cdot)$의 각각에 대응하는 $H(\cdot, \cdot)$과 $L(\cdot, \cdot)$을 conjugate Hamiltonian, Lagrangian으로 부른다.

Wentzell과 Freidlin은$x_t^{(m)}$ 의 mean collision time $E\tau_m$을 계산하기 위하여 Lagrange함수 $L(\cdot, \cdot)$을 피적분함수로 갖는 적분을 계산하는 방법을 제시하여 주었다. 따라서 이러한 적분이 가능하기 위하여, $x_t^{(m)}$ 와 동역학계(7)의 Hamilton함수와 Lagrange함수가 어떤 좋은 조건을 만족하여야 한다[20]. 본 스택 모형에서 즉, $x_t^{(m)}$, $t \geq 0$, $m=1, 2, 3, \cdots$의$H_{(m)}(\cdot, \cdot)$ 과$L_{(m)}(\cdot, \cdot)$ 그리고 동역학계 (7)의 $H(\cdot, \cdot)$과 $L(\cdot, \cdot)$은 Wentzell과 Freidlin의 5가지의 좋은 조건을 만족한다. 계산에 의하여

$$(11) \quad H_{(x,P)}^{(m)} = m \log[\ \frac{1}{2}\,(\cosh\frac{p_1}{m} + \cosh\frac{p_2}{m} - g(x_1)\sinh\frac{p_1}{m} - g(x_2)\sinh\frac{p_2}{m})]$$

$$H_{(x,P)} = m \log[\ \frac{1}{2}\,(\cosh p_1 + \cosh p_2 - g(x_1)\sinh p_1 - g(x_2)\sinh p_2)]$$

이다. 뿐만아니라, 모든 x, p에 대하여 $m \to \infty$일 때

$$H_{(x,p)}^{(m)} \ \rightarrow \ h(x, p)$$

$$\nabla_p(H_{(x,p)}^{(m)}) \ \rightarrow \ \nabla_p H(x, p)$$

가 성립한다. 따라서$x_{(\cdot)}^{(m)}$ 가 동역학계 (7)의 해 $x_{(\cdot)}$에 $m \to \infty$일 때 수렴함을 알 수 있으며,

Wentzell과 Freidlin 방법을 적용하면 수렴 속도와 수렴의미를 보일 수 있다.

이를 보이기 위하여, 주어진 T>0에 대하여, 임의의 연속 함수 $x:[0, T]\mapsto \Delta$에 대하여,

$$(12)\quad I_{0,T}(x)=\begin{cases}\int_0^T L(x(t), \dot{x}(t))dt, & x\text{가 절대연속 함수일때}\\ \infty & \text{그외의경우}\end{cases}$$

정의하고, 이를 작용 적분이라 한다. 본 스택 모형은 아래와 같다.

$$(13)\quad I_{0,T}^{(m)}(x^{(m)}_{(\cdot)})=\sum_{m=0}^{\lfloor a\rfloor}\frac{1}{m}L(x^{(m)}_{(k/m)}, u^{(m)}_{(k/m)})$$

$$I_{0,T}(x_{(\cdot)})=\int_0^T L(x(t), E\xi_{x(t)})dt$$

여기서, $a=mT$, $U^{(m)}_{(k/m)}=m(x^{(m)}_{(k+1/m)}-x^{(m)}_{(k/m)})$ 이다.

[정리1] [Wentzell과 Freidlin의 회소사건 확률 정리]

스택 모형의 확률 과정($x_t^{(m)}$, $P_{t,x}^{(m)}$)과 동역학계 (7)은 다음 회소사건 확률원리를 만족한다. [9]

i) 임의의 $\delta>0$, $x>0$ 및 $\gamma>0$과 충분히 큰 모든 m에 대하여, $\phi\in\Phi_{x_0[0,T],\lambda}$이면,

$$(14)\quad P_{0,x_0}^{(m)}[\sup_{0\le t\le T}|x^{(m)}_{(t)}-\phi(t)|<\delta] \ge \exp[-m(I_{0,T}(\phi)+\gamma)]$$

가 성립한다. 여기서 $\Phi_{x_0[0,T],\lambda}$는 $\{\phi\in C[0, t]: f(0)=x_0 I_{0,T}(\phi)\le\lambda\}$ 집합을 표시한다.

ii) 임의의 $\delta>0$, $\gamma>0$, x_0에 대하여, 충분히 큰 모든 m에 대하여

$$(15)\quad P^{(m)}_{0,x_0}[\rho_{0,T}(x^{(m)}_{(\cdot)}, \Phi_{x_0,[0,T],\lambda})\ge\delta] \le\exp[-m(\lambda-\gamma)]$$

단 여기서 $\rho_{0,T}$는 $x^{(m)}_{(\cdot)}$과 집합 $\Phi_{x_0,[0,T],\lambda}$와의 Sup norm에 의해 유도되는 거리를 뜻한다.

증명 : [10, 20]

스택 충돌의 평균 시간을 계산하게 위하여, 작용 적분의 국소 최소값을 계산하여야 한다. 이를 위하여 $x(0)=x_0$, $x(T)=x_1$인 연속함수 전체의 집합을 $C_{x_0, x_1}[0, T]$로서 표시하면

$$(16)\quad \lambda(x_0, x_1, T) = \inf\{I_{0,T}(\phi):\phi\in C_{x_0,x_1}[0, T]\}$$

로 정의하고,이를 국소 최소작용 적분값이라 부르고 이 값을 갖게 하는 경로 $\phi(\cdot)$를 국소 최소 경로라 정의한다.

임의의 공아닌 집합 $B\subseteq\Delta$에 대하여,

$$(17)\quad \lambda(x_0, B, T)=\inf\{\lambda(X_0, x, T); x\in B\}$$

로써 표시하고, 이 최소값을 갖는 경로를 인스탄톤 경로라 한다.

각 $m=1, 2, 3, \cdots$에 대하여 $x_t^{(m)}$, $t\ge0$ 의 최초 충돌 시간(first collision time)은

$$(18)\quad \tau_m=\inf\{t\ge0; x_t^{(m)}\in\Delta^*\}$$

로써 정의한다.

따라서 스택이 충돌할 때까지의 스택 조작 횟수는 $\eta_m=[m\tau_m]$이다. 위의 정리[1]를 적용하여 τ_m의 mean collision time의 점근적 결과를 보여보자. 각 $x\in\Delta$에 n_x를 경계선의 정규 법백터라 하면,

$$n_x\cdot E\xi_x=(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\cdot(-\frac{1}{2}g(x_1), -\frac{1}{2}g(x_2))<0$$

이므로, 다음 사실을 확정한다. $x\in\Delta^*$가 $\lambda(0, \Delta^*, T)=\lambda(0, x, T)$인 점이라면, 임의의 $\delta>0$에 대하여

$$(19)\quad \lim_{m\to\infty}p_0^{(m)}[|x^{(m)}_{\tau_m}-x|<\delta]=1$$

이 성립한다[10]. 즉 충돌이 발생하면, 충돌점은 Δ^*에서 최소값을 갖게하는 점 x임을 의미한다. 또한

$$(20)\quad \lim_{m\to\infty}m^{-2}\log E\tau_m=\lambda(0, \Delta^*, T)$$

가 성립한다[10].

그러므로, 식 (19)와 (20)에 의하여,본 스택모형 분석에서 언고자하는 최초의 스택충돌까지의 스택 원소의 삽입,삭제의 총 조작횟수의 점근치는

(21) $E\eta_m = E(m\tau_m) = O(me^S)$

여기서, $S = m^2 \cdot \lambda(0, \Delta^*, T)$

임을 알 수 있다. 다음 절에서 $\lambda(0, \Delta^*, T)$를 Hamilton역학계의 경로 적분을 계산하여 그 값을 제시한다.

5. 작용 적분값의 계산

본 장에서는 4장에서 제시된 충돌시간의 평균에 관한 점근적 근사값을 Hamilton 역학계의 계산방법에 의하여 제시한다. 4장에서 제시한 Freidlin과 Wentzell의 결과는 $m \to 0$일 때 $x_{(\cdot)}^{(m)}$ 의 형태는 동역학계 (7)의 해 $x(\cdot)$에 수렴한다는 의미이다. Hamilton 역학계의 계산방법을 쓰기 위하여 Wentzell-Freidlin의 Hamilton함수 그리고 작용적분의 기본 식들을 정리하여 쓰면 아래와 같다.

(1) $H(x, p) = \log Ee^{p\xi_x}$

$$L(x, u) = \sup_p [\ p \cdot u - H(x, p)]$$

$$I_{0,T}(x(\cdot)) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t))dt$$

고전 역학의 Hamiltonian form은

(2) $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = E[\ \xi_x e^{p\xi_x}]\ /E[\ e^{p\xi_x}]$

로써 주어진다. 또한 $H(x, p)$는 에너지로써 해석되므로, 입자의 에너지 보존법칙을 적용하면 다음 식이

(3) $\dfrac{d}{dt}H(x(t), p(t)) = 0$

성립한다. 인스탄톤 경로의 기본성질은 경로의 모든 점에서의 에너지는 0인 조건을 만족한다. 따라서

(4) $Ee^{p\xi_x} = 1$

식이 성립한다. 4장 (11)식을 이용하여 계산하면,

(5) $H(x, p) = \log[\ \frac{1}{2}(e^{X_1} + e^{X_2})]$

단, $X_1 = \tilde{H}(x_1, p_1), X_2 = \tilde{H}(x_2, p_2)$

이다. 여기서 $\tilde{H}(y, a) = \log[\cos q \text{-} g(y)\sin q]$로 정의된다. 따라서 $H(x, p)$는 분리가능(seperable)한 Hamilton함수이다[11]. 이 경우 동역학계 (7)의 해 $x(\cdot)$는 아래와 같이 표현된다.;

$u_1 = \tilde{H}(x_1, p_1)$, $u_2 = \tilde{H}(x_2, p_2)$일 때,

(6) $H(x, p) = \log(\frac{1}{2}(e^{u_1} + e^{u_2}))$

$$x(t) = (\tilde{x}(e^{u_1}t/e^{u_1}+e^{u_2}), \tilde{x}(e^{u_2}t/e^{u_1}+e^{u_2}))$$

여기서 $\tilde{x}(t)$는 1차원의 상미분 방정식

(7) $\begin{cases} \dot{x} = \sinh p - g(x)\cosh p \\ x(0) = 0 \end{cases}$

의 해이다. 식의 의미를 분명히 하기 위하여 식 (6)를 $H(x, P) = H(u_1, u_2)$로 놓고, 0에너지 조건으로부터

(8) $e^{u_1} + e^{u_2} = 2$

로써 주어진다.그러므로 이제부터 0에너지를 갖는 경로에서 인스탄톤 경로의 작용적분과 그 외 보조적인 계산방법을 통하여 수치값을 찾아야 한다. 인스탄톤 경로는 작용적분을 최소화하는 경로의 성질을 이용하면, 인스탄톤 경로가 경계점에 도달할 때, 그 도착점에서의 운동량 p는 경계를 이루는 곡선에 수직으로 마주치거나, 만나는 점이 미분 불가능한 점이다. 그러므로 조건식 (8)과 Δ^*이 만드는 곡선은 $x_1 + x_2 = 1$이므로, $u_1 = u_2 \neq 0$이거나 $u_1 = u_2 = 0$인 두 경우이다. 뿐만 아니라 Hamilton 함수가 분리가능한 경우, 식 (6)의 $x(t)$에 대응하는 운동량 식은

(9) $p(t) = (\tilde{p}(e^{u_1}t/e^{u_1}+e^{u_2}), \tilde{p}(e^{u_2}t/e^{u_1}+e^{u_2}))$

로써 주어진다. 여기서 $\tilde{p}(\cdot)$는 해 $\tilde{x}(\cdot)$에 대응하는 Hamilton역학계의 운동량이다. 그러므로 $\tilde{p} = 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})$로써 주어진다. 또한 작용적분과 경로적분의 동일성을 이용하면,

(10) $\displaystyle\int_{x\text{의 경로}} P(x) \cdot dx$

인스탄톤 경로의 작용적분 값으로써 얻는다.

[보조정리1] : $g(\cdot)$가 단조증가 함수이면,

$(u_1, u_2) \neq (0, 0)$인 0에너지 국소 극한경로는 인스탄톤 경로가 될 수 없다.

증명 : 임의의 t와 $h>0$ 그리고 적당한 $0 \leq \theta \leq 1$에 대하여, 평균치의 정리를 적용하면

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tilde{x}(t+h)-\tilde{x}(t) \\ &= h\dot{x}(t+\theta h) \\ &= h(1-e^{-2u}(1-g(x(t+\theta h))^2)^{1/2} \end{aligned}$$

성립한다. 뿐만아니라

$$\begin{aligned} 0 &\leq \dot{x}(t+h)-\dot{x}(t) \\ &= [1-e^{-2u}(1-g(\tilde{x}(t+h))^2)^{1/2} \\ &\quad -(1-e^{-2u}(1-g(\tilde{x}(t+h))^2)^{1/2}] \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 미분방정식(7)의 해 $\tilde{x}(t)$와 $\dot{x}(t)$는 단조증가 함수이다.

또한 해 $\tilde{x}(t)$ 대응하는 운동량 함수는 $\tilde{p}(t)=2\tanh^{-1}g(\tilde{x})$이고, $g(\cdot)$가 단조 증가 함수 이므로, 이는 $u_1<u_2$이면가 $\tilde{p}(e^{u_1}t/2)<\tilde{p}(e^{u_2}t/2)$가 성립한다. Δ^*가 이루는 경계선과 $p=(\tilde{p}(e^{u_1}t/2), \tilde{p}(e^{u_2}t/2))$가 직교하여야 하므로 $\tilde{p}(e^{u_1}t/2)<\tilde{p}(e^{u_2}t/2)$라는 사실에 모순이다. 따라서 $u_1=u_2$이어야 한다.

한편 $(u_1, u_2)=(0, 0)$인 경우에서 극소극한의 경로는 다음과 같이 분류된다.

(11) $$x_{(1)}^{(t)}=(\tilde{x}(\tfrac{t}{2}), \tilde{x}(\tfrac{t}{2}))$$

$$x_{(2)}^{(t)}=(\tilde{x}(\tfrac{t}{2}), 0)$$

$$x_{(3)}^{(t)}=(0, \tilde{x}(\tfrac{t}{2}))$$

$$x_{(4)}^{(t)}=\begin{cases} (\tilde{x}(\frac{t}{2}), 0) & , 0 \leq t < s \\ (\tilde{x}(\frac{t}{2}), \tilde{x}(\frac{(t-s)}{t})) & , t \geq s \end{cases}$$

$$x_{(5)}^{(t)}=\begin{cases} (0, \tilde{x}(\frac{t}{2})) & , 0 \leq t < s \\ (\tilde{x}(\frac{(t-s)}{t}), \tilde{x}(\frac{t}{2})) & , t \geq s \end{cases}$$

이러한 극소 극한 경로에 대하여 식 (10)에 대한 작용적분과 동일한 의미를 갖는 선적분을 $p=(2\tan h^{-1}g(\tilde{x}), 2\tan h^{-1}g(\tilde{x}))$를 사용하여 계산을 하면 다음과 같이 표현된다.

(12) $$I_{0,T}(x_{(1)}(\cdot))$$
$$= \int_{x=0}^{1/2} 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x} + \int_{x=0}^{1/2} 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x}$$
$$= 4\int_{x=0}^{1/2} 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x}$$

$$\begin{aligned} I_{0,T}(x_{(2)}(\cdot)) &= \int_{x=0}^{1} 2\tan h^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &= I_{0,t}(x_{(3)}(\cdot)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{0,T}(x_{(4)}(\cdot)) &= \int_{x=0}^{X} 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &+ \int_{X}^{z_1} 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x} \\ &+ \int_{0}^{z-X} 2\tanh^{-1}g(\tilde{x})d\tilde{x} \end{aligned}$$

단, $X=\tilde{x}(\frac{S}{2})$이고 $(z, z_1-\tilde{x}(\frac{S}{2}))$는 Δ^*와 $x_{(4)}(t)$가 수직으로 만나는 점이다.

[보조정리 2] 인스탄톤 경로는 $x_{(1)}(t)$이다.

증명 : $I_{0,T}(x_{(1)}(\cdot))$의 값이 다른 경로의 적분 값보다 작음을 보이면 된다. 앞의 보조정리에서 $\tanh^{-1}g(\tilde{x})$가 $\tilde{x}$가 증가함에 따라 단조 증가인 함수임을 보였다. 따라서 명백히

$I_{0,T}(x_{(1)})<I_{0,T}(x_{(2)})$이다. 또한

$$\begin{aligned} & I_{0,T}(X_{(1)})<I_{0,T}(x_{(4)}) \\ &= -2\int_{X}^{z}\tanh^{-1}g(x\int_{1/2-A}^{1/2}\tanh^{-1}g(\tilde{x}) \end{aligned}$$

단, $X=\tilde{x}(\frac{S}{2})$, $A=z+X$이고,

$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-z+\tilde{x}\left(\frac{S}{2}\right)\right)=z-\tilde{x}\left(\frac{S}{2}\right)$이고 $\tilde{x}\left(\frac{S}{2}\right)$와 z_1 사이에서 $\tanh^{-1}g(\tilde{x})$의 값이 $z-\tilde{x}\left(\frac{S}{2}\right)$ 와 $\frac{1}{2}$ 사이에서 값보다 크므로 위 식은 음의 값을 갖는다. 따라서

$I_{0,T}(x_{(1)})<I_{0,T}(x_{(4)})$이다. 같은 방법으로

$I_{0,T}(x_{(1)})<I_{0,T}(x_{(5)})$이다.

지금까지의 결과를 종합해보면, 4장의 식 (21)의 결과와 보조정리[2]에 의하여 다음 정리가 성립한다.

[정리 2] 각 $m=1, 2, 3,\cdots$에 대하여, 스택모형 $x_t^{(m)}$, $t\geq 0$의 최초 충돌시간 τ_m과 이때까지의 총스택 조작 횟수 $\eta_m=[m\tau_m]$은 다음의 점근적 근사값을 갖는다.

$$E[\eta_m]=O(me^s)$$

단, $S=4m^2\cdot\int_0^{1/2}\tanh^{-1}g(x)dx)$

Knuth의 스택모형은 $g(x)$함수가 상수 함수인 경우이므로, $\tanh^{-1}g=\log\frac{1+g}{1-g}$이고,

$$\int_0^{1/2}\left(\log\frac{1+g}{1-g}\right)dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+g}{1-g}\text{이며,}$$

$$E(\eta_m)=O\left(m\left(\log\frac{1+g}{1-g}\right)^{2m^2}\right)\text{이다. 또한,}$$

$I_0.\ \tau(x_{(2)})=2\int_0^1\tan h^{-1}g(x)dx=\log\left(\frac{1+g}{1-g}\right)$ 이므로 최종상태의 분포를 유추할 수있고, 특히 g=1/4인 경우 $O\left(m\left(\frac{5}{3}\right)^{2m^2}\right)$ 이다.

6. 결 론

본 논문은 전형적인 동적 메모리 할당에 대한 스택 시스템의 성능분석을 희소사건 확률계산 방법에 의하여 해석적인 성능분석이 가능함을 보였다. 앞으로 희소사건 확률계산 이론의 보다 일반적인 스택 시스템 및 정보,통신,전자 등 여러 시스템의 설계와 분석에 적용 가능성에 대한 연구가 기대된다.또한 여기서 제시된 여러 모델에 대한 시뮬레이션 결과와 이론적 결과의 비교 연구가 기대된다.

여기서 제시한 평균 충돌시간의 점근적 수치값은 Wentzell과 Freidlin 이후의 연구에 의하여 지수항에서 1차항 및 그 이하의 항들에 대하여 연구되고 엄밀한 과학에서 그 중요성이 인식되어지고 있다. 또한 응용영역으로는 Louchard와 Schott의[17] Deadlock을 피하기 위한 Banker's Algorithm의 설계와 성능분석에 희소사건 확률계산이론의 적용 및 그 결과가 기대된다.

참 고 문 헌

[1] P. H. Algoet and B. H. Marcus, "Large Deviation Theorems of Empirical Types of Markov Chains Constrained to Thin Sets," IEEE Trans. on IT, Vol. 38, No. 4, pp. 1276−1291, 1992.

[2] Y. Amit and M. I. Miller, "Large deviations for the asymptotics of Ziv-Lempel Codes for 2D Gibbs fields," IEEE Trans. on IT, Vol. 38, No. 4, pp. 1271-1275, 1992.

[3] Y. Amit and M. I. Miller, "Large deviations for Coding Markov chains and Gibbs random fields," IEEE Trans. on IT, Vol. 39, No. 1, pp. 109-118, 1993.

[4] G. R. Benitz and J. A. Bucklew, "Large deviation rate calculations for nonlinear Detectors in Gaussian Noise," IEEE Trans. on IT, Vol 38, No. 2, pp. 358-371, 1990.

[5] J. A Bucklew, *Large deviation Techniques in decision, simulation and estimation,* Wiley. New York, 1990.

[6] J. S. Sadowsky and J. A. Bucklew, "On Large deviations theory and asymptotically efficient Monte carlo Estimation," IEEE Trans. on IT Vol. 36, No. 3 pp. 579-588, 1990.

[7] R. S. Ellis," Entrophy, *Large deviations and statistical mechanics,* Springer-Verlag, 1985.

[8] P. Flajolet, "The evolution of two stacks in bounded space and random walks in a triangle," In mathematical foundations of computer science, Proceedings of the 12th symposium. No. 233 in Lecture Notes in computer science, Springer-Verlag, New York, pp. 325-340, 1986.

[9] M, L Fredman and D. L. Goldsmith, " Three stacks," in proceedings of the 29th Annual Symposium on the foundations of computer science, IEEE computer society press. New York, pp. 514-523, 1988.

[10] M. I. Freidlin and A. D. Wentzel, *Random perturbations of dynamic systems,* Springer-Verlag, New York, 1984.

[11] H. Goldstein, *Classical mechanics*, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading MA, 1980.

[12] N. J. Günther, "path integcal methods for computer performance analysis," Inf. Process. Lett. No. 32, pp. 7-13, 1989.

[13] N. J. Günther and J. G. shaw, "path integral evalution of ALOHA network transients." Inf. Process. Lett., No. 33, pp. 289-295, 1990.

[14] D. E. Knuth, *fundamental algorithms vol 1 The Art of computer programming*, 2nd ed. Addison -Wesley, 1981.

[15] K. B. Letaief and J. S. Sadowsky, "Computing bit-error Probabilities for Avalanche Photodiode receivers by Large Deviations Theory," IEEE Trans. on IT, vol. 38, No. 3, pp. 1162-1169, 1992.

[16] G. Louchard, "Random walks, Gaussian process and list structures" Theor. Computer Science, No. 53, pp. 99-124, 1987.

[17] G. Louchard and R. Schott, "Probabilitic Analisys of some distributed algorithms," In proc. of CAAP'90 : The 15th colloq. on trees in algebra and programming, Copenhagen, Denmark, A. Arnold, ed Springer-Verlag, New York, pp. 239-253, 1990.

[18] R. S. Maier, "A path integral approach to dynamic data structures," J. Complexity, (in press)

[19] P. W. Purdom and S. M. Stigler, "Statistical properties of the buddy system, J. Assoc. Comput. Mach., No. 17, pp. 683-697, 1970.

[20] A. D. Wentzell, *Limit Theorems on Large deviations for Markov Stochastic processes*, Kluwer Acad. Press, vol. 38, 1990.

[21] A. C. Yao, "An Analysis of a memory allocation scheme for Implementing stacks," SIAM. J. computation, No. 10. pp. 398-403. 1981.

정 치 봉

1981년 고려대학교 수학과졸업(이학사)
1984년 고려대학교 대학원 수학과 (이학석사)
1991년 Univ. of Rochester Dept. of Math.(Ph.D)
1992년～1994년 순천향대학교 전산통계학과 조교수
1995년～ 순천향대학교 수학과 조교수
관심분야 : 알고리즘, 계산이론, 계산기하학 및 응용, 수치해석, Simulation.