

A Finite Memory Structure Smoothing Filter and Its Equivalent Relationship with Existing Filters

Min Hui Kim[†] · Pyung Soo Kim^{††}

ABSTRACT

In this paper, an alternative finite memory structure(FMS) smoothing filter is developed for discrete-time state-space model with a control input. To obtain the FMS smoothing filter, unbiasedness will be required beforehand in addition to a performance criteria of minimum variance. The FMS smoothing filter is obtained by directly solving an optimization problem with the unbiasedness constraint using only finite measurements and inputs on the most recent window. The proposed FMS smoothing filter is shown to have intrinsic good properties such as deadbeat and time-invariance. In addition, the proposed FMS smoothing filter is shown to be equivalent to existing FMS filters according to the delay length between the measurement and the availability of its estimate. Finally, to verify intrinsic robustness of the proposed FMS smoothing filter, computer simulations are performed for a temporary model uncertainty. Simulation results show that the proposed FMS smoothing filter can be better than the standard FMS filter and Kalman filter.

Keywords : Finite Memory Structure, Smoothing Filter, Kalman Filter, Robustness, Unbiasedness

유한기억구조 스무딩 필터와 기존 필터와의 등가 관계

김민희[†] · 김평수^{††}

요약

본 논문에서는 제어 입력이 있는 이산 시간 상태 공간 모델에 대한 유한기억구조(Finite Memory Structure, FMS) 스무딩 필터(Smoothing filter)를 개발한다. FMS 스무딩 필터는 가장 최근 윈도우의 유한 관측값과 제어 입력값만을 이용하여 비편향성 제약조건하에서 최소 분산 성능 지표의 최적화 문제를 직접 해결함으로써 얻어진다. FMS 스무딩 필터는 비편향성(Unbiasedness), 무진동성(Deadbeat) 및 시불변성(Time-invariance)과 같은 내재적으로 좋은 특성을 갖는다. 또한, 관측값과 추정값이 구해지는 시간 사이의 지연 길이에 따라 FMS 스무딩 필터는 기존의 FMS 필터들과 동등함을 보인다. 마지막으로, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안된 FMS 스무딩 필터의 내재적인 강인성(Robustness)을 검증하기 위해 일시적인 모델 불확실성을 가진 시스템에 FMS 스무딩 필터를 적용해본다. 시뮬레이션 결과를 통해 제안된 FMS 스무딩 필터가 기존의 FMS 필터와 칼만(Kalman) 필터보다 우수할 수 있음을 보여준다.

키워드 : 유한기억구조, 스무딩 필터, 칼만 필터, 강인성, 비편향성

1. 서론

무한기억구조(Infinite Memory Structure, IMS) 필터의 대표적인 기법인 칼만(Kalman) 필터는 다양한 공학 문제에 서 상태 추정(State Estimation) 기법으로 널리 사용되어 왔다[1-3]. 최근 들어, 인공지능 및 5G 통신 분야에서 오염된 신호 중 필요한 신호의 특징과 구성요소를 추출하기 위해 사용되고 있다[4-8]. 그러나 칼만 필터의 재귀적인 계산 방식과

초기 시간부터 추정 시점까지의 모든 정보를 사용하는 무한 기억구조로 인해 오차가 누적되어 성능 저하는 물론 경우에 따라 발산의 가능성까지 존재한다. 무한 기억구조를 가진 칼만 필터의 대안으로 오차의 누적이 지속되지 않는 유한기억 구조(Finite Memory Structure, FMS) 필터가 상태 추정을 위해 개발되었고 신호처리, 제어시스템, 통신시스템 등 다양한 공학 분야에서 적용되어 왔다[9-15].

한편, 일반적인 경우 FMS 필터는 상대적으로 과거의 데이터를 기반으로 추정값을 제공하는 인과적(Causal) 성질을 가진 필터이기 때문에 추정값에 시간 지연이 존재할 수 있다. 따라서, 관측값과 추정값이 구해지는 시점 사이에 고정된 지연이 존재하는 경우의 상태추정을 위한 FMS 스무딩 필터(Smoothing Filter or Smoother)가 개발되었다[16-18]. 이러한 고정된 지연은 오직 추정값이 구해지는 시점과 관련이 있을 뿐 FMS 필

* 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(NRF-2017R1D1A1B03033024). 본 연구는 2020년도 한국산업기술대학교 연구년 교수 연구비에 의해 연구되었음.

† 비 회 원 : 한국산업기술대학교 신기술융합학과 석사

†† 정 회 원 : 한국산업기술대학교 전자공학부 교수

Manuscript Received : October 5, 2020

Accepted : October 22, 2020

* Corresponding Author : Pyung Soo Kim(pskim@kpu.ac.kr)

터와 마찬가지로 실제 추정값의 오류가 아니다. FMS 스무딩 필터는 일반적으로 필터보다 더 많은 관측값을 활용하여 상태 추정값을 제공하므로 필터보다 더 정확한 추정 성능을 가진다. 또한, 현재 시간까지의 관측 정보를 이용하여 지연시간에 상태 추정값을 제공하기 때문에 상태 변화 시 관측 정보를 미리 반영할 수 있어 필터보다 빠른 수렴 효과가 있다.

본 논문에서는 제어 입력이 있는 이산 시간 상태 공간 모델에 대한 유한기역구조 스무딩 필터를 개발한다. FMS 스무딩 필터는 가장 최근 윈도우의 유한 관측값과 제어 입력값만을 이용하여 비편향성 제약조건하에서 최소 분산 성능 지표의 최적화 문제를 직접 해결함으로써 얻어진다. FMS 스무딩 필터는 비편향성, 무진동성(Deadbeat) 및 시불변성(Time-invariance)과 같은 내재적으로 좋은 특성을 갖는다. 또한, 지연 길이에 따라 FMS 스무딩 필터는 기존의 FMS 필터[13, 14], 일괄 비편향 유한임펄스응답(Batch unbiased finite impulse response) 필터[10] 및 역방향(Backward) FMS 필터[9]와 동일함을 보인다. 마지막으로, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 제안된 FMS 스무딩 필터의 내재적인 강인성을 검증하기 위해 일시적인 모델 불확실성을 갖는 직류 전동기 시스템에 FMS 스무딩 필터를 적용한다. 시뮬레이션 결과를 통해 제안된 FMS 스무딩 필터가 FMS 필터와 칼만 필터보다 우수할 수 있음을 보여준다.

2. 제어입력을 갖는 FMS 스무딩 필터 및 내재적인 좋은 특성

제어 입력을 갖는 이산 시간(Discrete-time) 상태 공간 모델(State-space Model)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + Bu_i + Gw_i, \\ z_i &= Cx_i + v_i, \end{aligned} \quad (1)$$

위 식에서 x_i 는 상태(State)을 나타내는 변수, z_i 는 관측값(Measurement)을 나타내는 변수, u_i 는 제어 입력(Control input)을 나타내는 변수이다. 초기 시간 i_0 의 상태 추정값(Estimate)을 나타내는 \hat{x}_{i_0} 는 평균(Mean)이 \bar{x}_{i_0} 이고 공분산(Covariance)이 Σ_{i_0} 인 확률 변수(Random variable)이다. 시스템 잡음(System noise)을 나타내는 변수 w_i 와 관측 잡음(Measurement noise)을 나타내는 변수 v_i 는 평균이 0이며 공분산 행렬 Q 와 R 을 갖는 가우시안 백색 잡음(Gaussian white noise) 신호이다.

현재 시점 i 에서 고정된 길이 d 만큼의 지연을 갖는 시점, 즉 지연시간(Lagged time) $i-d$ 에서의 상태 변수 x_{i-d} 를 추정하기 위한 FMS 스무딩 필터는 가장 최근의 윈도우 $[i-M, i]$ 에서의 유한한 관측값과 제어 입력값만을 이용한다. 지연시간 $i-d$ 는 관측값과 추정값이 구해지는 시점 사이에 일정한 간격이 된다. 고정된 지연 길이 d 는 양의 정수이며 $0 \leq d < M$ 를 만족하며, 상태 변수를 추정하는 지연시간 $i-d$ 와 상태를 추정할 때 사용한 마지막 측정값의 현재시간 i 사이의 이산 시간 스텝 수와 같다. 윈도우 초기 시간 $i-M$ 은 간략하게 나타내기 위해 이후부터 i_M 으로 표기한다. 가장 최근의 윈도우 $[i_M, i]$ 의

유한 관측값과 제어 입력값은 각각 Z_i 와 U_i 로 표시되며 아래와 같은 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} Z_i &\equiv [z_{i_M}^T \ z_{i_{M+1}}^T \ z_{i_{M+2}}^T \ \dots \ z_{i-1}^T], \\ U_i &\equiv [u_{i_M}^T \ u_{i_{M+1}}^T \ u_{i_{M+2}}^T \ \dots \ u_{i-1}^T], \end{aligned} \quad (2)$$

Z_i 와 U_i 를 이용하여 이산 시간 상태 공간 모델 (1)은 아래와 같이 선형 회귀(Linear Regression) 모델로 표현된다.

$$Z_i - \bar{\Xi}U_i = \bar{\Gamma}x_{i_M} + \bar{\Lambda}W_i + V_i \quad (3)$$

위 식에서 잡음 항인 W_i 와 V_i 은 잡음 신호 w_i, v_i 에 대해 각각 (2)와 같은 형태를 가지며 행렬 $\bar{\Gamma}, \bar{\Xi}, \bar{\Lambda}$ 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &\equiv \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{M-2} \\ CA^{M-1} \end{bmatrix}, \\ \bar{\Xi} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ CA^{M-3}B & CA^{M-4}B & \dots & 0 & 0 \\ CA^{M-2}B & CA^{M-3}B & \dots & CB & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Lambda} &\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CG & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ CA^{M-3}G & CA^{M-4}G & \dots & 0 & 0 \\ CA^{M-2}G & CA^{M-3}G & \dots & CG & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

이산 시간 상태 공간 모델 (1)로부터 지연시간 $i-d$ 에서의 상태 변수 x_{i-d} 는 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$x_{i-d} = A^{M-d}x_{i_M} + \tilde{\Xi}U_i + \tilde{\Lambda}W_i, \quad (4)$$

여기서 행렬 $\tilde{\Xi}, \tilde{\Lambda}$ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} &\equiv \left[\overbrace{A^{M-d-1}B \ A^{M-d-2}B \ \dots \ AB \ B}^{M-d} \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{d} \right], \\ \tilde{\Lambda} &\equiv \left[\overbrace{A^{M-d-1}G \ A^{M-d-2}G \ \dots \ AG \ G}^{M-d} \ \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{d} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

따라서, Equation (4)를 선형 회귀 모델 (2)에 적용하면 지연시간 $i-d$ 에서의 상태 변수 x_{i-d} 는 아래와 같은 새로운 선형 회귀 모델로 표현할 수 있다.

$$Z_i - \Xi U_i = \Gamma x_{i-d} + \Lambda W_i + V_i, \quad (6)$$

여기서 Γ, Λ, Ξ 는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \Gamma &\equiv \bar{\Gamma}A^{-(M-d)}, \\ \Lambda &\equiv \bar{\Lambda} - \bar{\Gamma}A^{-(M-d)}\tilde{\Lambda}, \\ \Xi &\equiv \bar{\Xi} - \bar{\Gamma}A^{-(M-d)}\tilde{\Xi}. \end{aligned} \quad (7)$$

선형 회귀 모델 (6)에서 잡음 항인 $\Lambda W_i + V_i$ 는 평균이 0이며 다음과 같은 공분산을 갖는 백색 가우시안 신호이다.

$$\Pi \equiv \Lambda \left[\text{diag}(Q \ Q \ \dots \ Q) \right] \Lambda^T + \left[\text{diag}(R \ R \ \dots \ R) \right],$$

여기서, $\text{diag}(Q \ Q \ \dots \ Q)$ 와 $\text{diag}(R \ R \ \dots \ R)$ 는 각각 Q 와 R 을 M 개 갖는 블록 대각 행렬(Block-diagonal matrix)을 나타낸다.

본 논문에서 새롭게 개발하는 FMS 스무딩 필터는 최선 선형 비편향 추정(Best linear unbiased estimation) 접근법으로부터 유도한다[19]. FMS 스무딩 필터 \hat{x}_{i-d} 는 다음 식과 같이 최근의 윈도우 $[i_M, i]$ 에서의 유한 관측값 Z_i 와 제어 입력값 U_i 로부터 얻어지는 것으로 가정한다.

$$\hat{x}_{i-d} \equiv \mathcal{H}(Z_i - \Xi U_i), \quad (8)$$

여기서, \mathcal{H} 는 이득 행렬(Gain Matrix)이다. 식의 양변에 기댓값(Expectation)을 취하면 다음과 같은 관계식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\hat{x}_{i-d}] &= \mathbf{E}[\mathcal{H}(Z_i - \Xi U_i)] \\ &= \mathbf{E}[\mathcal{H}(\Gamma x_{i-d} + \Lambda W_i + V_i)] \\ &= \mathcal{H}\Gamma \mathbf{E}[x_{i-d}], \end{aligned}$$

여기서, $\mathbf{E}[\alpha]$ 는 변수 α 의 기댓값을 표현한다. 그러면, 다음과 같은 조건에 대해서

$$\mathcal{H}\Gamma = I \quad (9)$$

\hat{x}_{i-d} 는 비편향(Unbiased) 혹은 무편향이 된다. 즉, $\mathbf{E}[\hat{x}_{i-d}] = \mathbf{E}[x_{i-d}]$ 이 되는 것이다. 따라서, Equation (9)를 FMS 스무딩 필터 \hat{x}_{i-d} 에 대한 비편향성 제약조건(Unbiasedness Constraint)라고 부른다.

이제 궁극적인 목표는 (9)과 같은 비편향성 제약조건 하에서 다음과 같이 \hat{x}_{i-d} 의 추정 오차 $x_{i-d} - \hat{x}_{i-d}$ 가 최소 분산(Minimum variance)을 갖도록 최적의 이득 행렬 \mathcal{H} 를 구하는 것이다.

$$\mathcal{H}_* = \arg \min_{\mathcal{H}} \mathbf{E}[(x_{i-d} - \hat{x}_{i-d})^T (x_{i-d} - \hat{x}_{i-d})]. \quad (10)$$

앞서 언급한대로 최선 선형 비편향 추정 접근법을 이용하여 FMS 스무딩 필터 \hat{x}_{i-d} 는 식 (10)을 풀어 다음과 같은 형태로 구한다.

$$\hat{x}_{i-d} = H(Z_i - \Xi U_i), \quad (11)$$

여기서 FMS 스무딩 필터의 이득 행렬 \mathcal{H} 는 아래와 같다.

$$\mathcal{H} = (\Gamma^T \Pi^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Pi^{-1}.$$

식 (11)의 FMS 스무딩 필터 \hat{x}_{i-d} 는 무진동(Deadbeat), 시불변성(Time-invariance), 강인성(Robustness) 같은 내재적인 좋은 특성을 갖는다. 다음의 정리(Theorem)에서 볼 수 있듯이, FMS 스무딩 필터는 잡음이 존재하지 않는 경우 무진동의 특성을 갖는다.

정리 1. $\{A, C\}$ 를 관측할 수 있으며 $M \geq n$ 이라고 가정한다. 가장 최근의 윈도우 $[i_M, i]$ 에서 잡음이 없는 경우 FMS 스무딩 필터 \hat{x}_{i-d} 는 정확한 추정값을 제공한다.

증명 : 가장 최근의 윈도우 $[i_M, i]$ 에서 잡음이 없는 경우 상태 공간 모델 (1)는 아래와 같이 표현된다.

$$x_{i+1} = Ax_i, \quad z_i = Cx_i. \quad (12)$$

이 경우 Equation (6)으로부터 유한한 측정값 Z_i 와 제어 입력값 U_i 는 다음과 같이 지연시간 $i-d$ 에서 상태 변수 x_{i-d} 에 의해 결정된다.

$$Z_i - \Xi U_i = \Gamma x_{i-d}. \quad (13)$$

따라서, 다음의 관계식이 만족된다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i-d} &= (\Gamma^T \Pi^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Pi^{-1} (Z_i - \Xi U_i) \\ &= (\Gamma^T \Pi^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Pi^{-1} \Gamma x_{i-d} \\ &= x_{i-d} \end{aligned}$$

이것으로 무진동 특성 증명된다.

상태 추정값의 비편향성은 잡음이 있는 시스템에 대해서 상태 추정값의 평균이 상태 변수의 평균을 정확하게 추적함을 의미한다. 반면, 상태 추정값의 무진동성은 비록 상태 공간 모델(12)이 (1)에서와 같이 부가적인 잡음을 갖는다고 가정하고 Equation (11)의 FMS 스무딩 필터 \hat{x}_{i-d} 를 설계하였지만, 실제로 잡음이 없는 시스템에 대해서 상태 추정값이 상태 변수를 정확하게 추적함을 의미한다. 이러한 무진동 특성은 FMS 스무딩 필터의 유한한 수렴 시간(Finite convergent time)과 빠른 추적(Fast tracking) 능력의 근본적인 이유가 된다. 따라서, FMS 스무딩 필터가 미지의 시간에 발생하는 이상 신호의 신속한 탐지 및 추적, 예를 들어 고장 검출 및 진단(Fault detection and diagnosis) 혹은 목표물 기동 탐지 및 추적(Target's maneuver detection and tracking) 등에 적합할 것이라고 기대할 수 있다.

또한, Equation (11)에서 볼 수 있듯이 FMS 스무딩 필터에 대한 이득 행렬 $\mathcal{H} = (\Gamma^T \Pi^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Pi^{-1}$ 은 고정된 구간 $[0, M]$ 에서 한 번의 오프라인 계산만 필요하고 실시간으로 이동하는 모든 윈도우에 대해 시불변 특성을 갖는다. 따라서, 온라인 계산에는 Equation (10)과 같이 FMS 스무딩 필터 업데이트만 필요하게 되어 계산 복잡도는 $O(n)$ 가 된다. 고정 지연 칼만 스무딩 필터와는 달리 FMS 스무딩 필터는 추정 시간 $i-d$ 전후에 대한 두 개의 알고리즘의 결합을 요구하지 않는다. 또한, 중간값 저장을 위한 메모리와 초기화 알고리즘을 요구하지도 않는다.

게다가, 기존 FMS 필터[10, 14]에서 증명되었듯이, FMS 스무딩 필터 역시 유한기억구조 덕분에 모델 불확실성(Model uncertainty), 미지의 입력(Unknown input), 불완전한 관측값(Incomplete measurement) 등과 같은 일시적인 불확실성(Temporary uncertainty)에 대해 강인할 수 있다. 이러한 내재적인 강인함은 추후 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 검증될 것이다.

참고로, 윈도우 길이 M 은 제한된 FMS 스무딩 필터에서 유용한 설계 매개 변수가 될 수 있다. 따라서 FMS 스무딩 필터의 성능을 가능한 우수하게 만드는 적절한 윈도우 길이를 선택하는 것은 중요한 과정이 될 수 있다. FMS 스무딩 필터

의 잡음 억제(Noise suppression)는 윈도우 길이와 밀접한 관련이 있을 수 있으며, 윈도우 길이가 증가할수록 잡음 억제 효과가 커져 FMS 스무딩 필터의 성능이 향상될 수 있다. 즉, 더 큰 윈도우 길이를 선택하면 더 많은 관측값이 반영되기 때문에 성능이 향상될 수 있다는 것이다. 반면에, 윈도우 길이가 커질수록 FMS 스무딩 필터링을 통한 추정값의 수렴 시간(Convergent time)이 증가할 수 있다. 따라서 잡음 억제와 빠른 추정 사이에는 절충관계(Tradeoff)가 있음을 알 수 있다.

3. 기존 FMS 필터와의 등가 관계

본 절에서는 지연 길이 d 값에 따라 FMS 스무딩 필터가 기존 개발된 FMS 필터들[9, 10, 13, 14]과 등가 관계임을 보인다.

3.1 지연이 존재하지 않는 경우 ($d=0$)

지연이 없는 경우, 즉 $d=0$ 인 경우에 Equation (4)의 행렬 $\tilde{\Xi}$, $\tilde{\Lambda}$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\tilde{\Xi} &\equiv [A^{M-1}B \ A^{M-2}B \ \dots \ AB \ B], \\ \tilde{\Lambda} &\equiv [A^{M-1}G \ A^{M-2}G \ \dots \ AG \ G].\end{aligned}\quad (14)$$

따라서, Equation (7)의 행렬 Γ , A , Ξ 는 다음과 같이 된다.

$$\Gamma = \bar{\Gamma}A^{-M} = \begin{bmatrix} CA^{-M} \\ CA^{-M+1} \\ \vdots \\ CA^{-2} \\ CA^{-1} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$A = \bar{A} - \bar{\Gamma}A^{-M}\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} CA^{-1}G & CA^{-2}G & \dots & CA^{-M}G \\ 0 & CA^{-1}G & \dots & CA^{-M+1}G \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & CA^{-2}G \\ 0 & 0 & \dots & CA^{-1}G \end{bmatrix},$$

$$\Xi = \bar{\Xi} - \bar{\Gamma}A^{-M}\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} CA^{-1}B & CA^{-2}B & \dots & CA^{-M}B \\ 0 & CA^{-1}B & \dots & CA^{-M+1}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & CA^{-2}B \\ 0 & 0 & \dots & CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

따라서, (14)과 (15)의 행렬을 이용하면, 지연이 존재하지 않는 경우에 FMS 스무딩 필터 (10)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_i = (\Gamma^T \Pi^{-1} \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Pi^{-1} (Z_i - \Xi U_i). \quad (16)$$

위의 증명 과정을 통해 지연이 없는 경우에 Equation (16)의 FMS 스무딩 필터는 기존 표준형 FMS 필터[13, 14]와 등가임을 알 수 있다.

3.2 지연이 존재하지 않으며 잡음항의 공분산이 단위행렬인 경우 ($d=0, \Pi=I$)

지연이 없으며($d=0$) 선형 회귀 모델 (6)에서의 잡음 항인 $AW_i + V_i$ 의 공분산 Π 이 단위 행렬인 경우($\Pi=I$), Equation

(14)과 (15)의 행렬식을 이용하면 FMS 스무딩 필터 (10)은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_i = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T (Z_i - \Xi U_i). \quad (17)$$

위의 증명 과정을 통해 $d=0, \Pi=I$ 인 경우에 Equation (17)의 FMS 스무딩 필터는 기존의 일괄 비편향 유한임펄스 응답(Batch unbiased finite impulse response)필터[10]와 등가임을 알 수 있다.

3.3 지연 길이 d 와 윈도우 길이 M 이 동일한 경우 ($d=M$)

지연 길이와 윈도우 길이가 같은 경우($d=M$), Equation (5)의 행렬식은 다음과 같이 된다.

$$\tilde{\Xi} = \begin{bmatrix} \overbrace{\quad\quad\quad}^d \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \overbrace{\quad\quad\quad}^d \\ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Equation (18)을 이용하면 Equation (7)의 행렬식은 다음과 같이 표현된다.

$$\Gamma = \bar{\Gamma}, \quad A = \bar{A}, \quad \Xi = \bar{\Xi}. \quad (19)$$

따라서, $d=M$ 일 때, 행렬 (18), (19)을 이용하면 FMS 스무딩 필터 (10)은 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{x}_{i-M} = (\bar{\Gamma}^T \bar{\Pi}^{-1} \bar{\Gamma})^{-1} \bar{\Gamma}^T \bar{\Pi}^{-1} (Z_i - \bar{\Xi} U_i). \quad (20)$$

위의 증명 과정을 통해 $d=M$ 인 경우에 Equation (20)의 FMS 스무딩 필터는 기존의 역방향(Backward) FMS 필터[9]와 등가임을 알 수 있다.

4. 직류 전동기 시스템을 통한 컴퓨터 시뮬레이션

제안된 FMS 스무딩 필터를 직류(Direct Current, DC) 전동기(Motor) 시스템에 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션을 진행한다. 직류 전동기는 전기 에너지를 기계 에너지로 변환하는 전기 기계다. 특히, 직류 전원에 의해 구동되는 전기 모터는 합리적인 비용, 높은 성능과 같은 본질적인 좋은 특성에 의해 모터 제어 시스템에서 가장 많이 성공적으로 사용된다 [20]. 직류 전동기 시스템에 대한 이산 시간 상태 공간 모델 (1)을 구성하는 행렬들은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.8178 & -0.0011 \\ 0.0563 & 0.3678 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1813 \\ 0.0069 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.0006 \\ 0.0057 \end{bmatrix}, \quad C = [10]$$

직류 전동기는 유효 하중 없이 작동하고 전기가 전류와 회전 속도는 센서에서 측정된 출력값으로 설정된다. 직류 전동기는 운전하기 위해 입력전압과 같은 외부 전원을 요구하는데 이러한 외부 전원이 제어 입력이 된다. 본 시뮬레이션에서 제어 입력은 단위 계단(Unit step)으로 인가한다.

직류 전동기와 같은 동적시스템이 정확하게 상태 공간 모델로 표현되더라도 주파수, 위상 및 속도의 발산과 같은 예측할 수

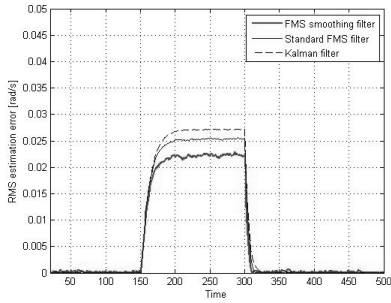


Fig. 1. RMS Estimation Error of Rotational Speed

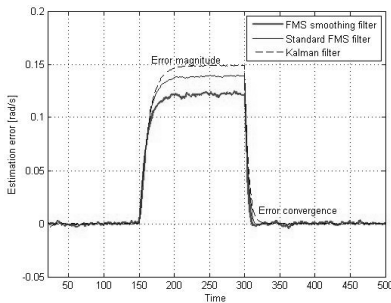


Fig. 2. Estimation Error of Rotational Speed

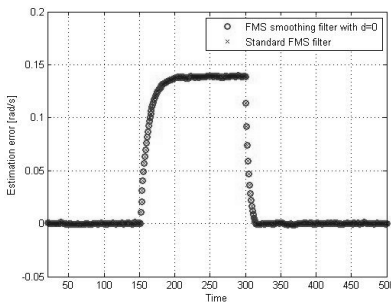


Fig. 3. Equivalent Relationship between Two Filters

없는 변화가 발생할 수 있고 이러한 증상은 일반적으로 단기간에 발생하므로 일시적인 불확실성(Temporary uncertainty)이라고 부른다[10]. 또한, 이러한 일시적인 불확실성에는 모델 불확실성, 불완전한 관측값, 미지의 입력 등이 있을 수 있는데 본 논문에서는 일시적인 모델 불확실성을 다룬다.

제안된 FMS 스무딩 필터의 내재적인 강인성을 검증하기 위해 직류 전동기 시스템은 다음과 같은 일시적인 모델 불확실성을 갖는다고 가정한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.8178 + \delta_i & -0.0011 \\ 0.0563 & 0.3678 + \delta_i \end{bmatrix}, \quad C = [1 + 0.2\delta_i \quad 0.2\delta_i], \quad (22)$$

여기서 δ_i 는 아래와 같이 설정한다.

$$\delta_i = \begin{cases} 0.1 & \text{if } 150 \leq i \leq 300, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

시뮬레이션에서 제안된 FMS 스무딩 필터, 기존의 표준 FMS 필터, 칼만 필터를 비교한다. 시스템 잡음 공분산과 관

측 잡음 공분산은 각각 $Q = 0.01^2$, $R = 0.05^2$ 으로 설정하여 필터들을 설계 하며, 실제 잡음 신호 역시 이를 기준으로 발생 시킨다. 제안된 FMS 스무딩 필터는 윈도우 길이를 $M=20$ 로 지연 길이를 $d=5$ 로 설정하며, 표준 FMS 필터는 윈도우 길이 $M=20$ 로 설정 한다. 비록 세 가지 종류의 필터는 직류 전동기 시스템 (21)을 모델링한 상태 공간 모델(1)에 의해 설계 되고 동작되지만, 실제 관측값은 일시적인 불확실성 (22)을 가진 모델로부터 얻어지는 것이다. 세 필터간의 추정 성능의 명확한 비교를 위해, 매번 시뮬레이션 수행 시 시스템 잡음과 관측 잡음을 변경하면서 20번의 시뮬레이션을 수행하였고 각 시뮬레이션은 500번의 샘플링을 한다.

Fig. 1은 20회 시뮬레이션을 진행한 후 회전 속도(Rotational speed)에 대한 제곱평균제곱근(Root mean square, RMS) 추정 오차를 보여준다. Fig. 2는 20회의 시뮬레이션 중 하나의 회전 속도 추정오차를 보여준다. 시뮬레이션 결과를 보면, FMS 스무딩 필터의 오차 수렴과 오차 크기가 다른 두 종류의 필터보다 우수할 수 있음이 확인 된다. FMS 스무딩 필터의 추정오차의 크기는 일시적인 모델 불확실성이 존재하는 구간에서 다른 두 종류의 필터보다 더 작다. 게다가, 일시적인 모델 불확실성이 사라지고 난 뒤의 FMS 스무딩 필터의 추정 오차의 수렴이 다른 두 종류의 필터보다 빠르다. FMS 스무딩 필터는 강인함을 고려하지 않고 설계되었지만, 일시적인 모델 불확실성이 존재하는 직류 전동기 시스템에서 FMS 스무딩 필터는 다른 두 종류의 필터보다 강인할 수 있음을 알 수 있다. 이러한 결과의 분석을 통해 FMS 스무딩 필터는 내재적인 강인성을 지녔음을 알 수 있다. 아울러, FMS 스무딩 필터는 일시적인 모델 불확실성이 없는 경우나 완전히 사라진 경우에 다른 두 종류의 필터와 유사한 성능을 확인할 수 있다. 아울러, 3절에서 수식적으로 유도했듯이, 지연이 없는 경우, 즉 $d=0$ 인 경우에 FMS 스무딩 필터가 기존의 표준 FMS 필터와 등가임을 Fig. 3을 통해 확인 할 수 있다.

5. 결론 및 향후 연구

본 논문에서는 제어 입력이 있는 이산 시간 상태 공간 모델에 대한 FMS 스무딩 필터를 개발하였다. FMS 스무딩 필터는 가장 최근 윈도우의 유한 관측값과 제어 입력값만을 이용하여 비편향성 제약조건하에서 최소 분산 성능 지표의 최적화 문제를 직접 해결함으로써 구하였다. FMS 스무딩 필터는 비편향성, 무진동성, 시불변성 및 강인성과 같은 내재적으로 좋은 특성을 갖는다. 또한, 관측값과 추정값이 구해지는 시점 사이의 지연 길이에 따라 FMS 스무딩 필터는 기존의 표준 FMS 필터, 일괄 비편향 유한임펄스응답 필터 및 역방향 FMS 필터와 동일함을 보였다. 제안된 FMS 스무딩 필터의 내재적인 강인성을 검증하기 위해 일시적인 모델 불확실성을 가진 직류 전동기 시스템에 FMS 스무딩 필터를 적용하여 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션 결과를 통해 제안된 FMS 스무딩 필터가 표준 FMS 필터와 칼만 필터보다 우수함을 확인할 수 있었다.

본 논문에서 윈도우 길이 선정은 시스템적인 방법보다는 다소 휴리스틱한 방식으로 설정하였다. 최근 몇몇 연구에서

시스템적인 방식으로 최적의 윈도우 길이를 구하려는 노력이 이루어지고 있다. 본 연구자들도 이를 향후 연구 주제로 삼고 진행할 계획이다.

References

- [1] M. Grewal, "Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.30, No.3, pp.69-78, 2010.
- [2] F. Auger, M. Hilairret, J. M. Guerrero, E. Monmasson, T. Orłowska-Kowalska, and S. Katsura, "Industrial applications of the Kalman filter: A review," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol.60, No.12, pp.5458-5471, 2013.
- [3] A. Barrau and S. Bonnabel, "Invariant Kalman filtering," *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, Vol.1, No.1, pp.237-257, 2018.
- [4] S. Mahfouz, F. Mourad-Chehade, P. Honeine, J. Farah, and H. Snoussi, "Target tracking using machine learning and Kalman filter in wireless sensor networks," *IEEE Sensors Journal*, Vol.14, pp.3715-3725, 2014.
- [5] J. Wang, R. Zhu, and S. Liu, "A differentially private unscented Kalman filter for streaming data in IoT," *IEEE Access*, Vol.6, pp.6487-6495, 2018.
- [6] R. Apelfrojd, "Channel estimation and prediction for 5G applications," Ph.D. dissertation, Uppsala University, Signals and Systems Group, 2018.
- [7] I. Ullah, M. Fayaz, and D. Kim, "Improving accuracy of the Kalman filter algorithm in dynamic conditions using ANN-based learning module," *Symmetry*, Vol.11, No.1, p.94, 2019.
- [8] M. Kozdoba, J. Marecek, T. Tchakian, and S. Mannor, "On-line learning of linear dynamical systems: Exponential forgetting in Kalman filters," in *2019 Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence*, 2019.
- [9] H. Kim, P. S. Kim, and S. Lee, "A delayed estimation filter using finite observation on delay interval," *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E91-A, No.8, pp.2257-2262, 2008.
- [10] Y. S. Shmaliy, S. Zhao, and C. K. Ahn, "Unbiased finite impulse response filtering: An iterative alternative to Kalman filtering ignoring noise and initial conditions," *IEEE Control Systems Magazine*, Vol.37, No.5, pp.70-89, 2017.
- [11] Y. Xu, Y. S. Shmaliy, Y. Li, X. Chen, and H. Guo, "Indoor INS/LiDAR-based robot localization with improved robustness using cascaded FIR filter," *IEEE Access*, Vol.7, pp.34189-34197, 2019.
- [12] M. Vazquez-Olguin, Y. S. Shmaliy, and O. Ibarra-Manzano, "Distributed UFIR filtering over WSNs with consensus on estimates," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol.15, 2019.
- [13] P. S. Kim, "Selective finite memory structure filtering using the Chi-square test statistic for temporarily uncertain systems," *Applied Sciences*, Vol.9, No.20, p.4257, 2019.
- [14] P. S. Kim and M. H. Kim, "Various forms of finite memory structure filter for discrete-time state-space model," in *Proc. International Conference on Artificial Intelligence in information and communication (ICAIIIC 2020)*, Fukuoka, Japan, 2020, pp.631-636.
- [15] P. S. Kim, "An alternative state estimation filtering algorithm for temporarily uncertain continuous time system," *Journal of Information Processing System*, Vol.16, No.3, pp.588-598, 2020.
- [16] P. S. Kim, "A finite memory structure smoother with recursive form using forgetting factor," *Mathematical Problems in Engineering*, Vol.2017, pp.1-6, 2017.
- [17] Y. S. Shmaliy, Y. Neuvo, and S. Khan, "Review of unbiased FIR filters, smoothers, and predictors for polynomial signals," *Frontiers in Signal Processing*, Vol.2, No.1, pp. 1-29, 2018.
- [18] A. Vicente, S. Zhao, and B. Huang, "Forward-backward smoothers with finite impulse response structure," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, pp.1-10, 2018.
- [19] J. Mendel, "Lessons in Estimation Theory for Signal Processing, Communications, and Control." Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1995.
- [20] B. Messner, D. Tilbury, R. Hill, and J. D. Taylor, DC Motor Speed: System Modeling: Control Tutorials for MATLAB and Simulink (CTMS). University of Michigan, 2017.



김민희

<https://orcid.org/0000-0002-8601-5400>

e-mail : carrie1657@naver.com

2019년 한국산업기술대학교 전자공학부
(학사)

2021년 한국산업기술대학교 신기술융합학과
(석사)

관심분야 : 제어 시스템 설계, 최적 추정 필터링, 임베디드시스템 소프트웨어 등



김평수

<https://orcid.org/0000-0002-9589-446X>

e-mail : pskim@kpu.ac.kr

1994년 인하대학교 전기공학과(학사)

1996년 서울대학교 제어계측공학과(석사)

2001년 서울대학교 전기컴퓨터공학부(박사)

2001년 ~ 2005년 삼성전자

디지털미디어연구소 책임연구원

2012년 UC Irvine CECS (Visiting Scholar)

2005년 ~ 현재 한국산업기술대학교 전자공학부 교수

관심분야 : 최적 추정 필터링, 통계적 신호처리, 시스템 소프트웨어 솔루션 등