

새로운 결합유효폭 측정법

이 적 식†

요 약

위치와 주파수 불확실성의 곱이 작은 해석함수는 영상처리와 압축에 많은 장점이 있다. 지금까지는 불확실성원리에 기초하여 이 값을 계산 하였으나, 이러한 측정은 최대 응답주파수가 0이 아닌 인간시각필터에서 적절한 주파수 불확실성의 측정방법이 될 수 없다. 최대 응답을 갖는 주파수에 대한 주파수 불확실성을 계산하는 새로운 측정방법을 이용하여 결합유효폭을 유도하고자 한다. 결합변수가 커지면 많은 함수들의 결합유효폭이 0.5로 수렴하는 해석 결과를 얻었으며, 고려 대상 중에서 Gabor cosine 함수가 우수한 성능을 보였다.

A New Metric for Joint Effective Width Computation

Juck Sik Lee†

ABSTRACT

Analyzing functions with small values of the product of position and frequency uncertainties have many advantages in image processing and data compression. Until now, this value has been computed based on the uncertainty principle, but the computed frequency uncertainty is not practical for the human visual filters which have non-zero peak response frequencies. A new metric for the frequency uncertainty is used to calculate a deviation about the frequency which has the maximum response. The joint effective widths for various functions are derived. As the result of analysis, the joint uncertainty for many functions converges to 0.5 as the joint parameter increases. Furthermore, Gabor cosine function shows an excellent performance among the mentioned functions.

키워드: 결합유효폭(joint effective width), Gabor complex, Gabor cosine, Gabor sine, Gaussian derivative, Hermite function

1. 서 론

Gabor는 불확실성(또는 불확정성)원리에 기초하여, 위치와 주파수 불확실성의 곱을 결합분해능으로 정의하여 최소값을 가짐을 보였다[1]. 복소 Gabor 함수가 최소값을 만족하지만 복소수 형태이기 때문에 실제적인 응용면에서 많은 제약이 따르며, 실수함수가 요구되는 영상처리, 컴퓨터시각의 필터 기능과 인간시각필터의 수학적 모델링에 Gabor cosine 또는 sine 이 많이 사용되고 있다[2-4]. 주어진 함수 형태에 대한 결합분해능은 상수값을 가지기 때문에 위치(시간 또는 공간)와 주파수 두 분해능을 동시에 작게 할 수는 없다. 극단적인 분해능(resolution 또는 localization)을 갖는 함수의 예로, 임펄스인 $\delta(x)$ 는 이상적인 위치분해능을 갖지만 모든 주파수 성분을 포함하기 때문에 주파수 분해능은 없으며, Fourier 변환의 해석함수인 복소지수함수($e^{j\omega x}$)는 이상적인 주파수 분해능을 가지나 적분 구간 때문에 무한간격의 위치 정보가 요구된다.

Fourier 변환의 낮은 위치 분해능을 해결하기 위해서 부분(short-time) Fourier 변환이 제안되었지만 일정한 위치와 주파수 분해능을 갖는다. 그 반면에 다분해능 해석(multiresolution analysis)인 웨이브릿 변환은 해석함수의 크기(scale)와 위치이동(shift)을 이용하여 주파수 변화에 따라서 다른 위치 분해능을 얻을 수 있다. 즉, 저주파성분에 대해서는 향상된 주파수 분해능과 저하된 위치분해능을 갖도록 하고, 고주파 성분에서는 그 반대로 한다. 웨이브릿의 크기 변화는 결합유효폭에 영향을 미치지 않는다. 위치와 주파수 영역에서 동시에 분해능이 좋은 함수는 영상처리와 영상압축에 상당히 중요한 역할을 하고, 분해능의 척도로 결합유효폭을 사용할 수 있기 때문에 인간시각필터로 거론되는 여러 함수에 대한 결합유효폭의 비교는 큰 의의가 있다.

임의의 함수 $f(x)$ 와 그것의 주파수 변환을 $F(\omega)$ 라고 하면, 위치와 주파수의 불확실성(uncertainty) 또는 유효폭(effective width) Δx , $\Delta \omega$ 는 다음과 같이 정의된다[5].

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \quad (1)$$

† 정 회 원: 경기대학교 전자·기계공학부 전자공학전공 교수
논문접수: 2001년 2월 26일, 심사완료: 2001년 9월 17일

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (2)$$

여기서 \bar{x} 와 $\bar{\omega}$ 는 아래 식 (3)으로 정의되는 위치와 주파수의 평균값이며, 실수인 위치함수와 $\omega=0$ 에서 대칭인 주파수함수에 대해서 이들 평균값은 0이다. 식 (1)과 (2)의 $|f(x)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ 와 $|F(\omega)|^2 / \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$ 는 확률밀도함수로 고려할 수 있으므로, 위 식들은 각각 공간과 주파수 영역에서의 분산(variance)을 의미한다.

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}, \quad \bar{\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (3)$$

위치와 주파수 결합불확실성(joint uncertainty) 또는 결합유효폭(joint effective width)은 $(\Delta x \Delta \omega)$ 로 정의되며, 불확실성원리에 의해서 그 값은 0.5이상이며, 복소 Gabor 함수가 최소값을 만족한다. 복소 Gabor 함수에서 변조주파수가 영인 경우인 Gaussian 함수가 실수 함수에서 역시 최소값을 만족한다.

더욱이 정의 식 (1)과 (2)는 실수 위치 함수에 대해서 항상 평균값들이 0이므로 정확한 주파수 유효폭을 나타내지 못한다. 일반적으로 전자공학, 생리학, 정신물리학에서 사용되는 대역폭은 최대 응답주파수를 중심으로 한 변위량으로 정의된다. 그러므로 평균값에 대한 유효폭을 산출하는 대신, 최대 응답주파수에 대한 유효폭 계산이 보다 실제적인 필터의 응용에 적합하다. 그래서 Stork와 Wilson[5]은 주파수유효폭에 대해서 아래의 새로운 정의식을 처음으로 제안하였으나, 직접 결합유효폭을 계산하여 사용하지는 않았고, 최소값을 만족하는 함수만을 유도하였다.

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{\int_0^{\infty} (\omega - \omega_m)^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (4)$$

여기서, ω_m 은 최대 응답을 갖는 주파수이며, 적분 구간은 양의 주파수로 국한된다. 최대주파수에 대한 편차를 계산하므로 식 (4)은 분산이 아니다.

본 논문에서 결합유효폭의 유도와 해석에 고려되는 함수는 인간시각작용의 필터로 많이 거론되는 함수들인 복소 Gabor, Gabor Cosine(GC), Gabor Sine(GS), Hermite 함수, Gaussian Derivative 함수(GD), Stork 함수들이다. Gaussian 함수와 복소지수함수를 곱한 형태인 복소 Gabor 함수는 인간 시각과 질의 수용영역(receptive field) 모델링과 영상표현을 위한 기저함수로 사용되었다[6, 7]. Stork와 Wilson[5]이 실수함수 중에서 최소 결합유효폭을 갖는다고 주장한 함수는 Gaussian 미분의 형태로 단순세포의 모델과 영상압축에 사용되며, 인

간시각모델에서 수용영역의 실험자료와 비교한 결과 Gabor 함수보다 잘 표현됨을 증명하였다[8]. 압축부분에서는 변환된 계수들의 양자화에 기인한 오차를 전체 영상에 고르게 분포시킴으로써 가장자리 효과를 DCT 방법보다 감소시킴을 보였다[9].

Hermite 함수의 공간과 주파수 불확실성의 곱에 대한 최적성은 논란의 여지가 존재한다. Gabor[1]는 Hermite 함수가 불확실성의 곱을 최소화시키는 실수함수로, Klein과 Beutter [10]는 최대화시키는 함수로 주장하고 있다. 인간시각필터의 모델을 다양한 함수 형태로 영상처리와 컴퓨터 시각에 적용하였지만, 여러 필터모델의 성능을 비교 분석한 것은 Bloom과 Reed에 의해서 시도되었다. Bloom과 Reed의 결과에서는 동일 차수에서 Hermite 함수의 불확실성 곱이 Gaussian 미분보다 크게 나타남을 보였다[11]. 그들은 불확실성에 기초하여 3 실수 함수(Hermite, Gabor cosine, Gaussian 미분)에 대해서 Gabor 정의식인 식 (1)-(3)으로 오직 결합유효폭을 계산하여, Gabor cosine 함수가 다른 함수보다 우수한 것을 보였다. Stork 함수는 Stork와 Wilson이 식 (1)과 (4)에 기초하여 유도한 함수 중에서 우함수만 다룬다. 여기서 1차원 함수에 대해서만 언급하지만 분리 가능한 조건에 대해서는 2차원 확장도 쉽게 할 수 있다.

본 논문에서는 영상처리와 인간시각필터로 사용되는 여러 함수들에 대하여 식 (1)과 (4)로 정의된 식을 이용하여 각각 위치유효폭과 주파수유효폭을 유도하고, 결과적인 결합유효폭 $(\Delta x \Delta \omega)$ 를 계산하여 상호 비교 분석하고자 한다. 기존 방법은 최소값을 정의할 수 있어서 이론적인 경향이 강하고, 제안된 방법은 최대 응답주파수에 대해서 결합유효폭을 산출하기 때문에 실제적인 필터 응용에 적합하다.

2장에서는 중심주파수와 결합유효폭을 유도하고, 3장에서는 고려된 함수들의 변수가 다르기 때문에 변수들의 상호관계를 정의하여 차수에 대한 결합유효폭의 분석과 더불어 기존 방법으로 계산된 결과와도 비교할 것이며, 마지막으로 결론을 맺는다.

2. 결합 유효폭

인간시각필터는 중심주파수에 따라서 다른 대역폭을 가지므로, 중심주파수와 대역폭 변화가 가능한 GD 계열, Gabor 계열, Hermite 함수, Stork 함수에 대해서 위치와 주파수 불확실성을 유도하고, 결합유효폭을 계산한다.

2.1 Gaussian 미분 함수

Gaussian 미분함수는 Gaussian 함수를 미분한 것으로, 미분 차수가 0인 원래의 Gaussian은 저역통과필터이고, 나머지의 모든 GD들은 대역통과필터특성을 지닌다. 1차원 Gaussian 미분함수 $g_n(x)$ 는

$$g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (5)$$

$$g_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} g_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} H_{n,\sigma}(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (6)$$

여기서, $H_{n,\sigma}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^n H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)$ 이며, $H_n(x)$ 는 n 차 Hermite 다항식이다. GD 함수의 주파수 변환은

$$G_0(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}, \quad G_n(\omega) = (j\omega)^n G_0(\omega) \quad (7)$$

위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{(4n-1)\sigma^2}{2(2n-1)}$ 이고, 주파수 응답이 최대가 되는 주파수 ω_m 은

$$\omega_m = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \quad (8)$$

주파수유효폭은 적분표를 사용하면[12]

$$\begin{aligned} (\Delta\omega)^2 &= \frac{2n+1}{2\sigma^2} + \omega_m^2 - \frac{2^{n+1} \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \frac{\omega_m}{\sqrt{\pi}\sigma} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{2n+1}{2} + n - \frac{2(2n)!!}{(2n-1)!!} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

결합유효폭은

$$(\Delta x \Delta\omega)^2 = \frac{4n-1}{2(2n-1)} \left(\frac{4n+1}{2} - \frac{2(2n)!!}{(2n-1)!!} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \right) \quad (10)$$

차수가 0이면 $(\Delta x \Delta\omega) = 0.5$ 이며, 차수가 증가하면 식 (10)의 두 번째 항이 0.25로 수렴하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x \Delta\omega) = 0.5$ 가 된다. GD 계열 중에서 영상처리, 컴퓨터 시각, 정신물리학에서 많이 언급되는 차수가 2(D2)인 Mexican hat wavelet 또는 LOG(Laplacian of Gaussian)의 결합유효폭은 $\sqrt{\frac{21}{4} - \frac{28}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} = 0.53421$ 이며, 차수가 6인 D6는 0.50885이다.

2.2 Hermite 함수

Hermite 함수는 식 (6)으로 정의되는 GD와 유사하나, Hermite 다항식에 다른 형태의 지수함수가 곱해진 것이다.

$$hf_n(x) = H_{n,\sigma}(x) e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (11)$$

주파수 변환은 아래와 같으며, 여전히 Hermite 다항식을 포함하고 있다.

$$HF_n(\omega) = j^n \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)^{n-1} e^{-\sigma^2\omega^2} H_n(-\sqrt{2}\sigma\omega) \quad (12)$$

위치유효폭은

$$(\Delta x)^2 = 2\sigma^2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (13)$$

주파수 변환식으로부터 n 차 최대 응답주파수를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\sqrt{2}\sigma\omega H_n(\sqrt{2}\sigma\omega) - 2n H_{n-1}(\sqrt{2}\sigma\omega) = 0 \quad (14)$$

또는 Hermite 다항식의 성질과 식 (14)를 이용하면 다음 식을 만족하는 주파수가 n 차 최대 응답주파수이다.

$$\frac{H_{n+1}(\sqrt{2}\sigma\omega)}{H_{n-1}(\sqrt{2}\sigma\omega)} = 2n \quad (15)$$

최대 응답주파수의 일반적인 해는 구할 수 없고, 4차까지의 계산한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} n=1: \omega_m &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}, & n=2: \omega_m &= \frac{\sqrt{5}}{2\sigma}, \\ n=3: \omega_m &= \frac{\sqrt{9+\sqrt{57}}}{2\sqrt{2}\sigma}, & n=4: \omega_m &= \frac{\sqrt{7+\sqrt{22}}}{2\sigma} \end{aligned} \quad (16)$$

주파수유효폭은

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{n+0.5}{2\sigma^2} + \omega_m^2 - \frac{2\sqrt{2}\omega_m}{\sigma} \frac{\int_0^\infty \omega e^{-\omega^2} H_n^2(\omega) d\omega}{\sqrt{\pi}(2n)!!} \quad (17)$$

4차수까지의 결합유효폭은

$$\begin{aligned} n=0: (\Delta x \Delta\omega) &= 0.5, \\ n=1: (\Delta x \Delta\omega) &= \sqrt{\frac{15}{4} - \frac{6}{\sqrt{\pi}}} = 0.60404, \\ n=2: (\Delta x \Delta\omega) &= 5\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10}{\pi}}} = 1.16156, \\ n=3: (\Delta x \Delta\omega) &= \sqrt{\frac{7}{2} \left(\frac{23+\sqrt{57}}{4} - 3\sqrt{\frac{9+\sqrt{57}}{\pi}} \right)} \\ &= 1.62217, \\ n=4: (\Delta x \Delta\omega) &= \sqrt{\frac{9}{2} \left(\frac{16+\sqrt{22}}{2} - \frac{27}{8}\sqrt{\frac{14+2\sqrt{22}}{\pi}} \right)} \\ &= 2.26294 \end{aligned} \quad (18)$$

Hermite 함수의 결합유효폭은 여기서 고려되는 다른 함수들과 달리 차수가 증가하면 발산한다.

2.3 Gabor 계열 함수

2.3.1 복소 Gabor 함수

인간시각의 필터로 많이 거론되는 복소 Gabor 함수는 Gau-

ssian 함수가 복소지수함수에 의해서 변조된 것이다. 식 (1)과 (2)로 정의되는 결합유효폭에서는 최소값을 만족한다.

$$g_a(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi^{1/4}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{j\omega_0 x} \quad (19)$$

주파수 변환식은

$$GA(\omega) = \sqrt{2\sigma\pi^{1/4}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} \quad (20)$$

위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{\sigma^2}{2}$ 이고, 최대 응답주파수 ω_m 은 변조 주파수 ω_0 와 같다. 주파수유효폭은 식 (21)과 같이 유도된다.

$$(\Delta\omega)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\omega_m \sigma e^{-(\omega_m \sigma)^2}}{\sqrt{\pi}(1 + \text{erf}(\omega_m \sigma))} \right] \quad (21)$$

여기서 $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 로 정의되는 error 함수이다.

결합유효폭은 $\rho = \sigma\omega_0$ 일 때

$$\begin{aligned} (\Delta x \Delta\omega)^2 &= \frac{1}{4} - \frac{\omega_m \sigma e^{-(\omega_m \sigma)^2}}{2\sqrt{\pi}[1 + \text{erf}(\omega_m \sigma)]} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\rho e^{-\rho^2}}{2\sqrt{\pi}[1 + \text{erf}(\rho)]} \end{aligned} \quad (22)$$

GD와 동일한 중심주파수와 표준편차를 사용하면, 즉 $\rho = \omega_0 \sigma = \sqrt{n}$ 를 이용하면 상호 비교가 가능하다. ρ 가 0일 때 결합유효폭 $(\Delta x \Delta\omega)$ 는 0.5이며, 증가하면 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\Delta x \Delta\omega) = 0.5$ 가 된다. 참고로 Morlet 웨이브릿[13]은 복소 Gabor 함수의 한 형태로 $\sigma = 1, \omega_0 = \pi\sqrt{2/\log_e 2}$ 인 경우이며 $(\Delta x \Delta\omega) \approx 0.5$ 이고, sinc 웨이브릿의 결합유효폭은 $\pi/(2\sqrt{3}) = 0.9069$ 이다.

2.3.2 Gabor Cosine(GC) 함수

현재까지 Gabor 계열에서 Gabor cosine이 일반적으로 영상처리와 컴퓨터시각 분야에 많이 사용되어 왔다. 함수 형태와 그것의 Fourier 변환은 다음과 같다.

$$g_c(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cos(\omega_0 x) \quad (23)$$

$$GC(\omega) = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2\sigma^2}{2}} \right] \quad (24)$$

$\rho = \sigma\omega_0$ 일 때, 위치유효폭 $(\Delta x)^2 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1 + (1-2\rho^2)e^{-\rho^2}}{1 + e^{-\rho^2}}$

로 유도된다. 최대 응답주파수 ω_m 는 해석적으로 구할 수 없으며, 다음 식을 만족하는 ω 가 최대 응답주파수이다.

$$2\rho^2 \frac{\omega}{\omega_0} = \ln \frac{1 + \omega/\omega_0}{1 - \omega/\omega_0} \quad (25)$$

ρ 가 1에 가까워지면 최대 응답주파수는 0에 수렴하고, ρ 가 증가할수록 최대 응답주파수는 ω_0 에 가까워진다. 위 식에서

$\lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow 0} \rho^2 = 1$ 과 $\lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow 1} \rho^2 = \infty$ 임을 알 수 있다. ω/ω_0 에 대

한 식 (25)의 우변항 기울기는 $(\omega/\omega_0) = 0$ 에서 항상 2이다.

식 (25)의 좌변항의 기울기는 $2\rho^2$ 이므로 ρ 가 1보다 작으면 우변항보다 작기 때문에, 식 (25)의 양쪽 항을 그래프로 그리면 만족하는 중심주파수는 0이고, 이때 Gabor cosine의 주파수응답은 $\omega = 0$ 에서 하나의 피크가 생기며 그 점에서 최대가 된다. ρ 가 1보다 크면, 크기가 같은 양과 음의 두 주파수에서 피크가 발생된다. ρ 와 (ω_m/ω_0) 에 대한 관계가 (그림 1)에 보여준다. ρ^2 이 3보다 크면 $\omega_m \approx \omega_0$ 가 되며, 이때 GD 경우와 비교하면 $\rho^2 = n$ 이 된다.

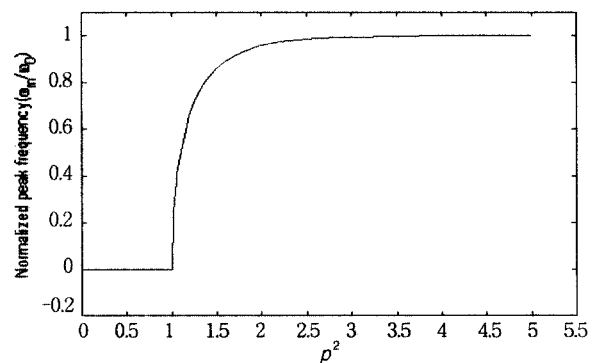
주파수유효폭은 식 (4)에서 분모는 $\sqrt{\pi}(1 + e^{-\rho^2})/(4\sigma)$, 분자는 다음 식과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{4\sigma^2} \left[\frac{1}{2} + \rho^2 \left\{ 1 - 2 \frac{\omega_m}{\omega_0} \text{erf}(\rho) + \left(\frac{\omega_m}{\omega_0} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + e^{-\rho^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{4\rho}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_m}{\omega_0} + \rho^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega_0} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

결합유효폭은 $\omega_r = \omega_m/\omega_0$ 로 놓을 때 아래와 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} (\Delta x \Delta\omega)^2 = \\ \frac{\left[\frac{1}{2} + \rho^2(1 - 2\omega_r \text{erf}(\rho) + \omega_r^2) + e^{-\rho^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{4\rho}{\sqrt{\pi}} \omega_r + \rho^2 \omega_r^2 \right) \right] [1 + (1 - 2\rho^2)e^{-\rho^2}]}{2(1 + e^{-\rho^2})^2} \end{aligned} \quad (27)$$

결합유효폭은 주어진 변수 ρ 에 대해서 식 (25)를 이용하여 먼저 ω_r 을 구하고, ρ, ω_r 의 함수로 식 (27)을 사용하여 계산된다.



(그림 1) Gabor cosine의 정규화된 최대주파수

ρ 가 매우 커지면 $\omega_r \rightarrow 1$ 이 되고, 식 (27)에서 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\Delta x \Delta\omega) =$

0.5가 된다. ρ 가 1보다 작으면 $\omega_r = 0$ 가 되므로 결합유효폭은 아래식과 같고, $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\Delta x \Delta \omega) = 0.5$ 이다.

$$(\Delta x \Delta \omega)^2 = \frac{[1+2\rho^2+e^{-\rho^2}][1+(1-2\rho^2)e^{-\rho^2}]}{4(1+e^{-\rho^2})^2} \quad (28)$$

2.3.3 Gabor Sine(GS) 함수

Gabor 복소함수의 허수 부분에 해당하는 함수로 기함수 형태로 평균값이 0이다.

$$gs(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \sin(\omega_0 x) \quad (29)$$

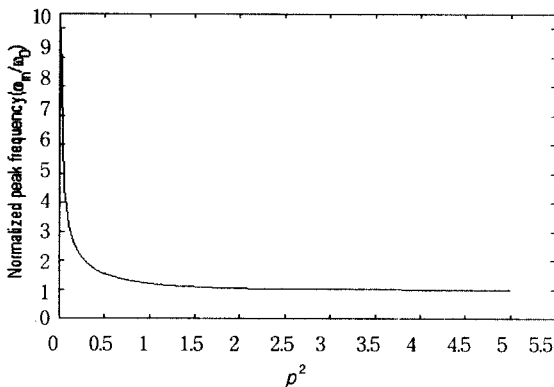
$$GS(\omega) = \frac{1}{2j} \left[e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} - e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2\sigma^2}{2}} \right] \quad (30)$$

위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{1-(1-2\rho^2)e^{-\rho^2}}{1-e^{-\rho^2}}$ 이고, GC 경우처럼 해석적으로 최대 응답주파수를 구할 수 없고, 다음 식을 만족하는 ω 가 최대 응답주파수이다.

$$2\rho^2 \frac{\omega}{\omega_0} = \ln \frac{\omega/\omega_0 + 1}{\omega/\omega_0 - 1} \quad (31)$$

$\lim_{\omega/\omega_0 \rightarrow 1} \rho^2 = \infty$ 이고, (그림 2)와 같이 ρ 가 증가할수록 최대 응답주파수는 ω_0 에 가까워진다. ρ 가 주어질 때 식 (31)을 만족하는 최대 응답주파수를 ω_m 그리고 $\omega_r = \omega_m/\omega_0$ 라고 하면, 결합유효폭은 아래와 같이 유도된다.

$$(\Delta x \Delta \omega)^2 = \frac{\left[\frac{1}{2} + \rho^2(1-2\omega_r \operatorname{erf}(\rho) + \omega_r^2) - e^{-\rho^2} \left(\frac{1}{2} + \rho^2 \omega_r^2 \right) \right] [1-(1-2\rho^2)e^{-\rho^2}]}{2(1-e^{-\rho^2})^2} \quad (32)$$



(그림 2) Gabor sine의 정규화된 최대주파수

$\rho = 0$ 에서 GS의 결합유효폭은 위 식에서 구할 수 없기 때문에 로피탈의 정리를 적용하여 분모와 분자를 각각 4번 미분하

여 $\rho = 0$ 를 대입하면 $\lim_{\rho \rightarrow 0} (\Delta x \Delta \omega) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ 를 얻을 수 있으며, ρ 가 커지면 ω_r 이 1에 수렴하고 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\Delta x \Delta \omega) = 0.5$ 이다.

2.4 Stork 함수

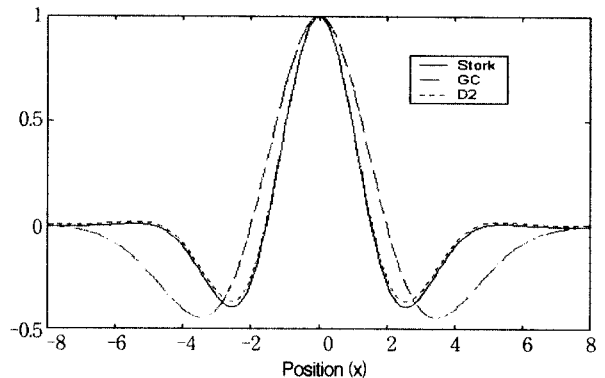
Stork과 Wilson은 식 (1)과 (4)에 의해 정의되는 결합유효폭이 최소가 되는 우대칭함수와 기대칭함수만을 유도하였고, 실제적인 유효폭들을 계산하지 않았다. 그 중에서 우대칭함수를 + 와 - 주파수 영역으로 나누어서 아래식으로 유도하였다[5]. Gabor cosine 함수와 비교하면 저주파 부근에서는 조금 다르고, 주파수가 커질수록 비슷한 특성을 가진다.

$$SW(\omega) = \begin{cases} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{2}} & \text{for } \omega \geq 0 \\ e^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2\sigma^2}{2}} & \text{for } \omega \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

공간영역의 Stork 함수는 error 함수로 표현되어 해석적으로 구할 수 없지만, 공간함수를 수치해석적으로 구하여 Gabor cosine, Gaussian 2차 미분 함수와 정규화하여 비교해보면, Gabor cosine 함수와 유사함(그림 3)에서 알 수 있다. 위치유효폭을 계산하기 위해서는 평균 위치값을 알아야 한다. $SW(-\omega) = SW(\omega)$ 를 만족하므로 공간영역에서의 Stork 함수는 실수이며, 평균값 \bar{x} 은 0이다. 위치유효폭은 $(\Delta x)^2 = \sigma^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho e^{-\rho^2}}{1+\operatorname{erf}(\rho)} \right]$ 이며, 양의 최대 응답주파수는 ω_0 와 같아서 주파수유효폭은 $(\Delta \omega)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho e^{-\rho^2}}{1+\operatorname{erf}(\rho)} \right]$ 와 같다. 그러므로 결합유효폭은

$$(\Delta x \Delta \omega) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\rho e^{-\rho^2}}{1+\operatorname{erf}(\rho)} \quad (34)$$

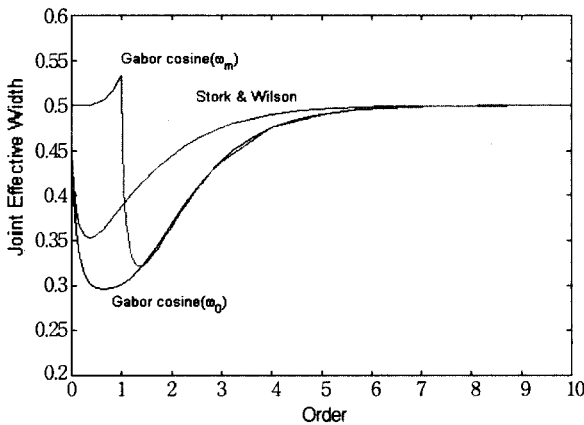
위 식의 두 번째 항은 양의 값을 가지므로 결과적인 결합유효폭은 0.5보다 작은 값을 가질 수 있다. ρ 가 0일 때 결합유효폭 $(\Delta x \Delta \omega)$ 는 0.5이며, 증가하면 $\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\Delta x \Delta \omega) = 0.5$ 가 된다. 기대칭함수에 대한 결합유효폭도 식 (34)와 동일하다.



(그림 3) 공간영역의 Stork 함수

3. 비교 분석

Stork와 Wilson은 그들이 유도한 식 (33)과 Gabor cosine 을 비교하였다. 정의 식 (4)에는 최대주파수를 사용하였지만 실제적으로 Gabor cosine 함수와 비교할 때는 변조주파수 ω_0 를 사용하였기 때문에 정확한 비교가 되지 못하였다. 그리고 그들은 Stork 함수의 장점으로 직류성분이 Gabor cosine 함수의 반이 된다고 언급하였지만(그들은 식 (24)의 상수 1/2을 1로 고려하였음) 이것은 유효폭 계산시 에너지로 정규화되기 때문에 유효폭에는 직접적인 영향이 없다. Stork 함수, ω_0 를 기준으로 한 Gabor cosine (ω_0), 실제적인 최대 응답주파수 ω_m 을 기준으로 한 Gabor cosine (ω_m) 함수를 비교한 결합 유효폭의 결과는 (그림 4)와 같다. ω_0 를 기준으로 결합유효 폭을 계산한 Gabor cosine (ω_0)이 최소를 보여주며, ρ^2 이 1.5 이상이면 최대 응답주파수 ω_m 을 기준으로 한 Gabor cosine (ω_m) 함수와 거의 동일한 결과를 보여준다. 그러므로 ρ^2 이 1 이상이면 Stork 함수는 최소 결합유효폭을 나타내지 못한다.



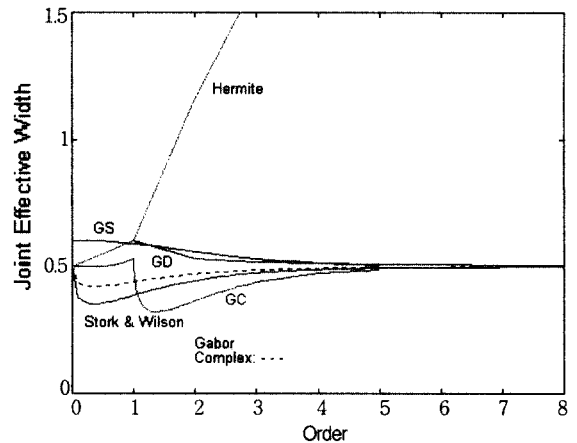
(그림 4) Stork 함수와 Gabor cosine의 결합유효폭

유도된 결합유효폭들은 차수 또는 $\rho = \omega_0 \sigma$ 만의 함수이다. ρ 를 결합변수(joint parameter)라고 하여, 차수와 결합변수의 관계를 정의하면 상호비교가 가능하다. GD와 Hermite 함수에서 차수와 결합변수사이를 연관시키는 식이 존재하기 때문에 두 함수를 기준으로 각각 해석할 것이다.

(그림 5)는 GD를 기준으로 하여 다른 함수들의 결합유효 폭을 계산한 결과이다. 복소 Gabor 함수, GC, GS 모두 $\rho = \omega_0 \sigma$ 만의 함수로 주어지므로, GD에서 차수와 ρ 의 관계식인 $\rho = \omega_0 \sigma = \sqrt{n}$ 를 사용하여 비교한 것이다. 차수가 0 즉 ρ 가 0일 경우, Gabor sine의 결합유효폭은 $3/\sqrt{2}$ 으로 매우 큰 값이기 때문에 그림에는 나타나지 않았으며, 다른 모든 함수의 결합유효폭은 0.5이다. 이것은 차수가 0 또는 변조주파수 ω_0 가 0이면, GC를 제외한 모든 함수가 평균값이 0(또는 최대 응답주파수가 0)이 되어, 일반적인 Gaussian 함수가 되기 때문이다. 실제적인 여러 응용분야에서는 중심주파수

변화가 요구되므로 σ 만의 함수인 Gaussian은 부적합하다.

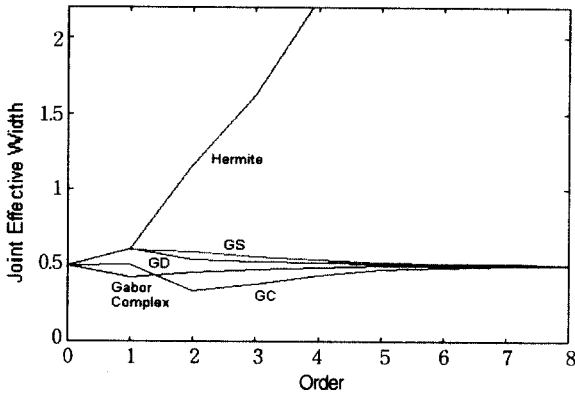
차수가 1일 경우, GD와 Hermite 함수는 동일한 유효폭을 갖는다. 차수가 증가하면 Hermite 함수의 결합유효폭은 발산하므로 고려된 것 중에서 가장 성능이 좋지 않는 함수이고, 복소 Gabor 함수, GD, GC, GS는 0.5로 수렴한다. 특히 $0 < \rho < 1$ 에서는 Stork 함수가, $\rho > 1$ 인 경우에는 GC가 최소 결합유효폭을 나타낸다. 차수가 1이상에서 성능이 좋은 순서는 GC, Stork 함수, Gabor 복소함수, GD, GS 이다. 결합유효폭이 불확실성원리의 최소값보다 작아지는 부분이 존재하는 이유는 여기서 정의된 주파수유효폭이 평균값에 대한 편차가 아니고 피크값에 대한 편차를 계산했기 때문이다. 특히 Stork와 Wilson은 GC 경우, 최대 응답주파수에 대한 변위를 계산한 것이 아니라 cosine의 주파수에 대해서 주파수 불확실성을 계산하였다. 즉 그들은 최대 응답주파수를 cosine 항의 주파수와 동일하게 고려하였다. 이것은 식 (27)에서 ω_r 에 1을 대입한 것과 같으며, 그들이 정의한 결합유효폭과 다른 것이다. 실제적으로 인간시각필터로 많이 사용되는 필터들은 차수가 2 또는 그 이상이므로 GC가 가장 좋은 필터로 고려할 수 있다.



(그림 5) GD를 기준한 결합유효폭

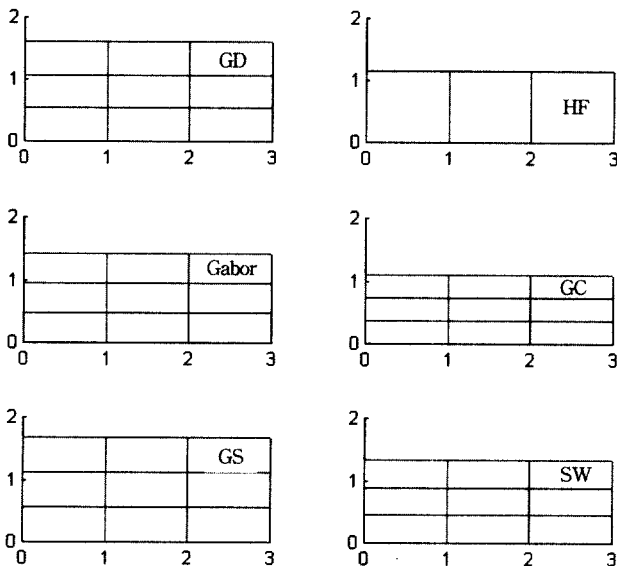
(그림 6)은 Hermite 함수에서 계산된 $\rho = \omega_0 \sigma$ 값을 기준으로 다른 함수들의 결합유효폭을 자연수 차수에서 계산한 결과이다. 이것은 식 (16)에서 보듯이 Hermite 함수의 ρ 값을 자연수 차수에서만 구할 수 있기 때문이다. (그림 5)와 비교하면 Gabor 복소함수와 GC는 GD 기준보다 다소 적은 유효폭값을, GS는 큰 유효폭값을 나타낸다. 차수에 따른 전반적인 유효폭의 경향은 GD 기준과 유사하다. 작은 차수 또는 작은 ρ 값을 사용할 경우에는 함수 선택이 중요하지만 차수가 커지면 거의 성능 차이가 없음을 알 수 있다.

2차원 GD 경우에서 2차 미분(Laplacian of Gaussian)은 영상처리에 가장 자리를 추출하기 위해서 많이 사용된다. 그래서 $n=2$ 또는 $\rho = \sqrt{2}$ 를 사용하여, 각 함수에 대한 결합유



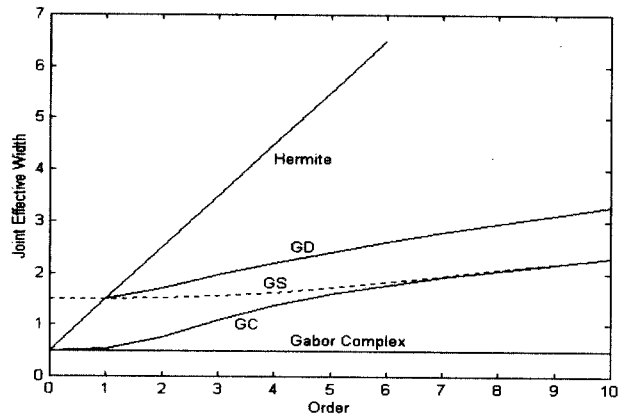
(그림 6) Hermite 함수를 기준한 결합유효폭

효폭을 계산하면 다음과 같다. GD : 0.5342, Hermite : 1.1616, 복소 Gabor : 0.4716, GC : 0.5333, GS : 0.5601, Stork 함수 : 0.4448. 신호 해석의 정성적인 비교를 위해서 시간-주파수 타일(tile) 형태로 표현한 것이 (그림 7)에 나타나 있다. 각 그림 우측 상단 타일 내부에 해당 함수가 표시되어 있고, 그 중에서 Gabor는 복소 Gabor 함수, HF는 Hermite 함수, SW는 Stork 함수를 의미한다. 수평축을 시간으로 고려하면 수직축은 주파수가 되고, 그 반대로도 생각할 수 있다. 그림처럼 시간축(수평축)을 단위 간격으로 동일하게 분할할 경우, GC가 가장 좋은 주파수 분해능을 나타내며, 그 다음으로 Stork과 Wilson, 복소 Gabor, GD, GS, Hermite 함수 순서이다. Hermite 함수의 결합유효폭이 매우 크기 때문에 수직방향으로 하나의 타일만을 표시하였다. Stork과 Wilson의 주장과 다르게 GC가 Stork 함수보다 결합유효폭이 더 작아서 우수한 성능을 나타냄을 알 수 있다. 그 이유는 그들이 GC 경우에 정확한 최대 응답주파수를 사용하지 않았기 때문이다.



(그림 7) 시간-주파수 타일

결합유효폭의 정의 식 (1) - (3)을 사용하여 계산한 기존 방법의 결과가 (그림 8)에 나타나어 제안한 방법과 비교하였다. Stork 함수는 새로운 정의식으로 유도된 함수이므로 그림에 포함하지 않았다. 복소 Gabor 함수는 이론적인 최소값을 만족하고, GC는 차수가 커질수록 결합유효폭이 증가하지만 실수함수 중에서는 가장 우수한 성능을 보여준다. 제안 방법인 (그림 5)와 비교하면 기존 방법의 결합유효폭이 전반적으로 상당히 큰 값을 가짐을 알 수 있다. 제안 방법에서 $\rho > 1$ 인 경우, Gabor cosine이 Gabor 복소함수보다 우수한 결합유효폭의 성능을 나타내며, Hermite 함수를 제외한 모든 함수가 0.5로 수렴함을 알 수 있다. 다시 말하면 GD 경우는 큰 차수를, 다른 함수는 큰 최대주파수와 큰 σ 를 사용하면 결합유효폭이 0.5에 가까워진다. 기존 방법은 복소 Gabor를 제외한 모든 함수는 차수 증가에 따라서 결합유효폭은 발산한다. 두 방법에서 가장 큰 차이점은 차수가 1이상인 경우, (그림 8)의 기존 방법에서는 GS가 GD보다 좋은 것으로, (그림 5)의 제안 방법에서는 GD가 GS보다 좋은 것으로 나타나 있다. GD가 인간시각필터의 응답과 유사하기 때문에 여러 필터분야에서 GD가 GS보다 많이 적용되는 것을 보면, 제안 방법의 결합유효폭 측정이 실제적으로 보다 적합함을 알 수 있다.



(그림 8) GD를 기준한 기존 방법의 결합유효폭

4. 결 론

불확정성원리에 기초한 기존의 결합유효폭은 복소 Gabor 함수가 최소값을 만족하지만, 제안된 정의식에 대해서는 실제 필터 응용에서 많이 사용되는 1이상의 차수에서 Gabor cosine이 복소 Gabor보다 더 좋은 결합유효폭을 보여주었다. 그리고 Stork과 Wilson이 유도한 함수 역시, 일반적으로 사용되는 차수가 1이상에서 Gabor cosine보다 저하된 성능을 나타낸다. 새로운 주파수유효폭 정의식은 기존 Gabor의 정의식보다 실제적인 대역폭과 주파수 분해능에 관련성이 깊다. 그러므로 Gabor cosine을 영상처리와 인간시각필터에 사

용하면 공간과 주파수 두 영역에서 분해능이 우수한 필터 특성을 얻을 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

[1] D. Gabor, "Theory of communication," *Journal of Inst. Electr. Eng.*, Vol.93, pp.429-457, 1946.

[2] N. Qian and Y. Zhu, "Physiological computation of binocular disparity," *Vision Research*, 37, No.13, pp.1811-1827, 1997.

[3] J. Jones and L. Palmer, "An evaluation of the two-dimensional Gabor filter model of simple receptive fields in cat striate cortex," *Journal of Neurophysiology*, Vol.58, No.6, pp.1233-1258, Dec. 1987.

[4] S. J. Prince and R. A. Eagle, "Stereo correspondence in one-dimensional Gabor stimuli," *Vision Research*, 40, pp.913-924, 2000.

[5] D. G. Stork and H. R. Wilson, "Do Gabor functions provide appropriate descriptions of visual cortical receptive fields?" *Journal of Optical Society of America, A*, Vol.7, No.8, pp.1362-1373, Aug. 1990.

[6] J. G. Daugman, "Uncertainty relation for resolution in space, spatial frequency, and orientation optimized by two-dimensional visual cortical filters," *Journal of Optical Society of America, A*, Vol.2, No.7, pp.1160-1169, July 1985.

[7] T. S. Lee, "Image representation using 2D Gabor wavelets," *IEEE Trans. on PAMI*, Vol.18, No.10, pp.959-971, Oct. 1996.

[8] R. A. Young, "Simulation of human retinal function with the Gaussian derivative model," *Int'l Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp.564-569, 1986.

[9] A. P. Morgan, L. T. Watson and R. A. Young, "A Gaussian derivative based version of JPEG for image compression and decompression," *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol.7, No.9, pp.1311-1320, Sept. 1998.

[10] S. A. Klein and B. Beutner, "Minimizing and Maximizing the joint space-spatial frequency uncertainty of Gabor-like functions," *Journal of Optical Society of America, A*, Vol.9, pp.337-340, 1992.

[11] J. A. Bloom and T. R. Reed, "An uncertainty analysis of some real functions for image processing applications," *International Conference on Image Processing*, pp.670-673, 1997.

[12] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, and D. Zwillinger, 'Table of Integrals, Series and Products,' Sixth Ed., Academic Press, 2000.

[13] M. Vetterli and J. Kovacevic, 'Wavelets and subband coding,' Prentice Hall, 1995.



이 적 식

e-mail : jslee@kuic.kyonggi.ac.kr
 1979년 경북대학교 전자공학과(학사)
 1986년 Texas A&M Univ., Elec. Eng.
 (석사)
 1991년 Texas A&M Univ., Elec. Eng.
 (박사)

1979년~1984년 국방과학연구소 연구원
 1992년~현재 경기대학교 전자·기계공학부 전자공학전공 부교수
 관심분야 : 영상처리, 생체신호처리, 컴퓨터시각 등