

피라미드 그래프의 범사이클 특성

장 정 환[†]

요 약

본 논문에서는 피라미드 그래프 내에 내재된 사이클 특성을 분석한다. 높이 N 의 피라미드 그래프에 연속적인 사이클 확장 연산을 적용함으로써 길이 3이상 $(4^N-1)/3$ 까지에 해당하는 모든 길이의 다양한 사이클들을 생성할 수 있음을 증명한다. 이는 피라미드 그래프가 범사이클 특성을 보유하고 있음을 의미한다.

키워드 : 피라미드, 범사이클성, 사이클 확장

The Pancyclic Property of Pyramid Graphs

Jung-Hwan Chang[†]

ABSTRACT

In this paper, we analyze a cycle property embedded in pyramid graphs. We prove that it is always possible to construct diverse cycles of all lengths from 3 to $(4^N-1)/3$ by applying series of cycle expansion operations to the pyramid graph of height N . This means that the pyramid graph has the pancyclic property.

Keyword : Pyramid, Pancyclicity, Cycle Expansion

1. 개 요

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 정점(node, vertex)들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들을 비교 분석하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제가 대두하게 되었다[1,2].

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube 또는 (이진) n -큐브)를 꼽을

수 있으며[3], 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 또한 병렬처리분야에서 비교적 잘 알려진 상호연결망 구조 중 하나로 널리 이용되고 있는 실정이다[4,5].

높이 N 인 피라미드(pyramid)의 경우 $(4^N-1)/3$ 개의 정점들을 갖는 계층적 구조의 그래프로써 오늘날 각광을 받고 있는 멀티미디어 분야의 저 레벨에서의 픽셀 단위 영상처리 관련 기능을 효율적으로 처리해 줄 수 있는 구조적 특성으로 인해 관련 분야를 중심으로 널리 이용되어 왔으나 오늘날은 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조를 다양하게 활용함으로써 그래프 관련 기본문제들의 해결에도 좋은 성과를 얻고 있는 것으로 알려져 있다[5].

손님(guest) 그래프 G 의 주인(host) 그래프 H 로의 임베딩(embedding)이란 G 의 정점들의 집합 $V(G)$ 로부터 H 의 정점들의 집합 $V(H)$ 로의 일대일 대응을 의미하는 함수 F 로 정의된다. 이때 G 의 간선(edge) $e=(v,w)$ 는 $F(v)$ 와 $F(w)$ 를 연결하는 H 의 경로(path) $F(e)$ 에 대응된다.

높이가 N 인 피라미드를 대상으로 한 임베딩 관련 연구로는 주로 2-차원 또는 3-차원 메쉬(mesh)를 주인 그래프로 하는 연구결과들이 비교적 잘 알려져 있으며[6,7,8,9], 링(ring) 임베딩 관련 연구결과도 알려져 있다[10].

한편 본 논문에서는 사이클의 다양성과 관련된 범사이클(pancyclic) 특성을 밝히는 것에 초점을 맞추고 있는데, 노드 n 개로 구성된 단순 그래프(simple graph) G 가 범사이클 특성을 갖는다는 것은 G 내에 구성가능한 최소 크기(=3)의 사

* 이 논문은 2007년도 부산외국어대학교 학술연구조성비에 의해 연구되었음.

† 정 회 원 : 부산외국어대학교 디지털미디어학부 부교수

논문접수 : 2007년 12월 27일, 심사완료 : 2008년 2월 19일

이클부터 최대 크기(=n)인 해밀톤 사이클(Hamiltonian cycle)까지에 해당하는 모든 종류의 사이클들을 부그래프(subgraph)로 보유하고 있는 성질을 의미하는데[11], 대표적인 상호연결망 모델의 하나인 하이퍼큐브 부류의 그래프들을 대상으로 사이클의 다양성을 분석한 최근 연구결과도 제시된 바 있다[12].

상호연결망 그래프에 내재된 사이클 특성을 분석한 연구들이 갖는 의미는 다양한 응용분야에 적용되고 있는 대부분 알고리즘들의 수행에 필요한 기본 자료구조일 뿐만 아니라 수많은 프로세서들로 구성된 다중컴퓨터 병렬처리시스템에서 사이클 기반의 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전달 과정을 필요로 하는 응용분야에서 하부구조로 사이클 특성을 활용하고 있는 점을 예로 들 수 있다[13].

본 논문에서는 피라미드 그래프를 대상으로 링을 임베딩 하는 문제와 동일한 의미를 갖는 해밀톤 사이클을 찾는 문제를 다룬다. 피라미드 그래프의 특성을 활용한 사이클 확장 연산을 이용함으로써 모든 정점들이 포함되는 최대 크기의 해밀톤 사이클을 찾을 수 있는 알고리즘을 제시함으로써 해밀톤 사이클의 존재를 확인하게 된다.

본 논문은 네 개의 절로 구성되며, 제2절에서는 본 논문에서 주로 다루게 될 피라미드 그래프에 대한 정의와 사이클 확장 연산의 주요 특성들에 대해 분석하고 제3절에서는 피라미드 그래프에 내재된 사이클들의 다양성에 대한 분석 과정을 통해 모든 홀수 길이 사이클들이 존재함을 증명하게 되며, 마지막 제4절에서 결론을 맺는다.

2. 그래프 특성

본 절에서는 연구 대상이 되는 피라미드 그래프에 대한 정의 및 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

[정의 1] 주어진 양의 정수 N 에 대해 높이가 N 인 피라미드 P^N 은 정점(vertex)의 집합 $V(P^N)$ 과 간선(edge)의 집합 $E(P^N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

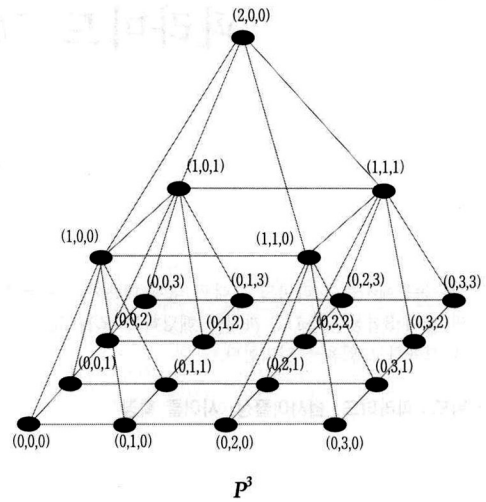
$$1) V(P^N) = \bigcup_{0 \leq i \leq N-1} \{ (l, x, y) | 0 \leq x, y \leq 2^{N-i} - 1 \}$$

$$2) E(P^N) = \bigcup_{0 \leq i \leq N-2} \{ ((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2)) | |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1, (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P^N) \}$$

$$\cup \bigcup_{0 \leq i \leq N-2} \{ (l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor) | 0 \leq x, y \leq 2^{N-i} - 1 \}$$

(그림 1)은 높이(height)가 3인 피라미드의 예를 보여주고 있다. 일반적으로 높이가 N 인 피라미드 P^N 의 각 계층 $l(0 \leq l < N)$ 에는 4^{N-l} 개의 정점들로 구성된 정방형 2-차원 메쉬 $2^{N-l} \times 2^{N-l}$ 구조로 이루어져 있어 가장 위 계층에 해당하는 계층 $N-1$ 의 1개의 정점으로 구성된 2-차원 메쉬로부터 시작하여 가장 아래 계층에 해당하는 계층 0의 4^{N-1} 개로 구성된 2-차원 메쉬까지 다양한 그래프들을 포함하고 있음을 알 수 있다.

[정의 2] 그래프(graph)에서의 「경로(path)」란 시작 정점 v_1 으로부터 연속하여 인접된 간선을 따라 연속적으로 나열된 정점들의 정렬 $(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 을 의미하며, 특별히 간선의 중복 방문이 허용되지 않도록 각 구성 정점들의 분지수(degree)가 최대 2로 제한된 경로를 「단순 경



(그림 1) 높이 3인 피라미드 그래프 예

로(simple path)」라고 일컫는다. 특별히 시작 정점과 마지막 정점 간에 연결 간선을 갖는 닫힌 단순 경로(closed simple path)를 「사이클(cycle)」이라고 한다.

한편 주어진 그래프(또는 부그래프(subgraph))를 구성하고 있는 모든 정점들을 반드시 한 번씩만 지나가게 되는 해당 그래프 내의 최대 길이 단순 경로를 「해밀톤 경로(Hamiltonian path)」라고 한다.

주어진 경로의 「길이(length)」란 해당 경로를 구성하고 있는 간선들의 개수를 의미한다. 즉 n 개의 정점 $(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 로 구성된 경로 T 와 해당 경로의 길이를 각각 $T = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 및 $|T|$ 로 표기하며, 따라서 $|T|=n-1$ 이다. 반면에 n 개의 정점 $(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 로 구성된 사이클 C 인 경우에 길이는 $|C|=n$ 이다. 일반적으로 길이가 n 인 경로 T 및 사이클 C 를 각각 T_n 과 C_n 으로 표기한다.

[정의 3] 길이가 각각 m 과 n 인 주어진 두 개의 사이클 $C_m = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ 과 $C_n = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 이 각각 $u_i(1 \leq i < m-s)$ 및 $v_j(1 \leq j < n-s)$ 로부터 시작되는 길이 $s(1 \leq s \leq \min(m, n))$ 의 부-경로(sub-path)를 서로 공유하여 다음 식이 성립한다고 가정하자.

$$u_{i+k} = v_{j+k} \quad (0 \leq k < s)$$

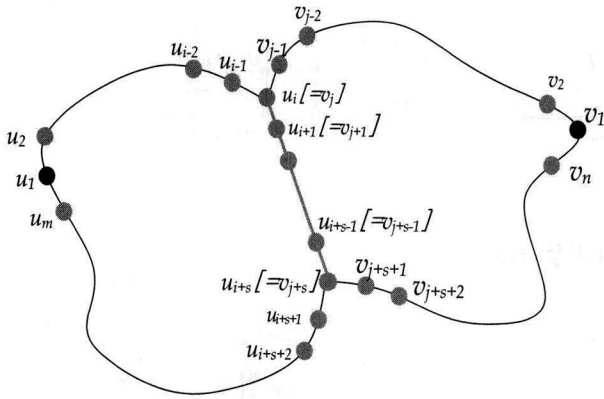
이와 같이 길이 s 에 해당하는 부-경로를 서로 공유하고 있는 두 개의 사이클 C_m 과 C_n 을 대상으로 하는 「사이클 결합 연산(cycle merge operation)」 \oplus 는 다음과 같이 정의된다.

$$C_m \oplus C_n = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i [=v_j], v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_2, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{j+s+2}, v_{j+s+1}, v_{j+s} [=u_{i+s}], u_{i+s+1}, u_{i+s+2}, \dots, u_{m-1}, u_m)$$

(그림 2)에서는 이러한 사이클 관련 결합 연산(\oplus)의 예를 보여주고 있다. 그림에서 제시된 예와 위의 결합 연산 정의에 의해 다음과 같은 기본 성질을 확인할 수 있다.

[보조정리 1] 길이가 각각 $m(\geq 2)$ 과 $n(\geq 2)$ 인 주어진 두 개의 사이클 C_m 과 C_n 내에 길이 $s(1 \leq s \leq \min(m, n))$ 에 해당하는 부-경로(sub-path)를 서로 공유하고 있다면, $C_m \oplus C_n$ 연산의 결과 얻어지는 확장된 사이클의 길이는 다음 식으로 표현된다.

$$|C_m \oplus C_n| = m+n-2s \quad \square$$



(그림 2) 사이클 결합 연산(\oplus)의 예제

계층간 연결 간선(inter-level edge)들은 크게 두 가지 부류로 구분이 가능한데, 하나는 해당 간선이 삼각형(triangle)을 구성하는 간선 그룹($E_t(P^N)$)과 사각형(quadrangle)을 구성하는 간선 그룹($E_q(P^N)$)으로 다음과 같이 분류할 수 있다.

$$E_q(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-1} \{ ((l, 2x, y), (l-1, 2x+1, y)) \mid 0 \leq x < 2^{N-l-2}, 0 \leq y < 2^{N-l-1}, (l, 2x, y), (l-1, 2x+1, y) \in V(P^N) \}$$

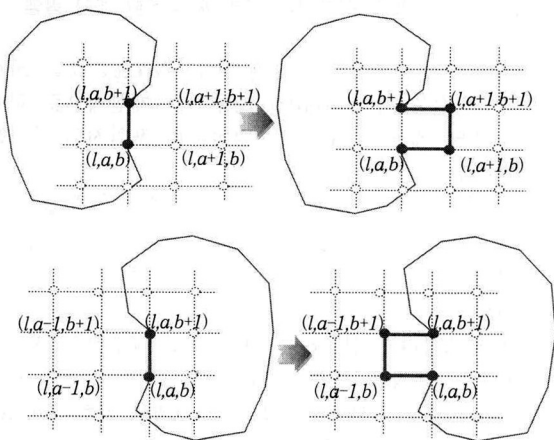
$$\cup \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{ ((l, x, 2y), (l-1, x, 2y+1)) \mid 0 \leq x < 2^{N-l-1}, 0 \leq y < 2^{N-l-2}, (l, x, 2y), (l-1, x, 2y+1) \in V(P^N) \}$$

$$E_t(P^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{ ((l, 2x-1, y), (l-1, 2x, y)) \mid 1 \leq x < 2^{N-l-2}, 0 \leq y < 2^{N-l-1}, (l, 2x-1, y), (l-1, 2x, y) \in V(P^N) \}$$

$$\cup \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{ ((l, x, 2y-1), (l-1, x, 2y)) \mid 0 \leq x < 2^{N-l-1}, 1 \leq y < 2^{N-l-2}, (l, x, 2y-1), (l-1, x, 2y) \in V(P^N) \}$$

[정의 4] 피라미드 그래프 상의 임의의 계층 l ($1 \leq l \leq N-1$)에 속한 두 정점 (l, a, b) 와 $(l, a, b+1)$ 를 포함하여 기 구축된 사이클 C 와 x -방향을 따라 인접된 네 개의 정점 $(l, a+1, b)$, $(l, a+1, b+1)$, $(l, a-1, b)$ 및 $(l, a-1, b+1)$ 에 대해 다음과 같은 두 가지 형태의 간선 확장 연산을 정의할 수 있다.

(1) E-확장(East Expansion): 기 구축된 사이클 C 는 간선 $e = ((l, a, b), (l, a, b+1))$ 를 포함하며, 정점 $(l, a+1, b)$ 와 $(l, a+1, b+1)$ 은 포함하지 않는 경우 간선 e 에 적용 가능한 E-확장 연산을 $E(C, e)$ 로 표기하며, C 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에 $C = (\dots, (l, a, b), (l, a, b+1), \dots)$ 에서 $C' = E(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l, a+1, b)}, \underline{(l, a+1, b+1)}, (l, a, b+1), \dots)$ 로 변경된다.



(그림 3) E-확장 및 W-확장 개념도

(2) W-확장(West Expansion): 기 구축된 사이클 C 는 간선 $e = ((l, a, b), (l, a, b+1))$ 를 포함하며, 정점 $(l, a-1, b)$ 와 $(l, a-1, b+1)$ 는 포함하지 않는 경우 간선 e 에 적용 가능한 W-확장 연산을 $W(C, e)$ 로 표기하며, C 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에 $C = (\dots, (l, a, b), (l, a, b+1), \dots)$ 에서 $C' = W(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l, a-1, b)}, \underline{(l, a-1, b+1)}, (l, a, b+1), \dots)$ 로 변경된다.

[정의 5] 피라미드 그래프 상의 임의의 계층 l ($1 \leq l \leq N-1$)에 속한 두 정점 (l, a, b) 와 $(l, a+1, b)$ 를 포함하여 기 구축된 사이클 C 와 y -방향을 따라 인접된 네 개의 정점 $(l, a, b+1)$, $(l, a+1, b+1)$, $(l, a, b-1)$ 및 $(l, a+1, b-1)$ 에 대해 다음과 같은 두 가지 형태의 간선 확장 연산을 정의할 수 있다.

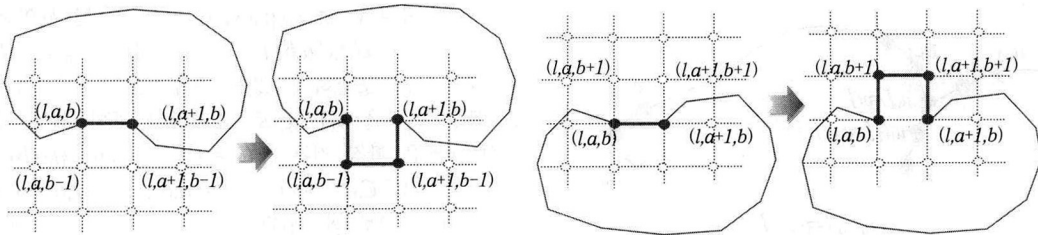
(1) N-확장(North Expansion): 기 구축된 사이클 C 는 간선 $e = ((l, a, b), (l, a+1, b))$ 를 포함하며, 정점 $(l, a, b+1)$ 과 $(l, a+1, b+1)$ 은 포함하지 않는 경우 간선 e 에 적용 가능한 N-확장 연산을 $N(C, e)$ 로 표기하며, C 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에 $C = (\dots, (l, a, b), (l, a+1, b), \dots)$ 에서 $C' = N(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l, a, b+1)}, \underline{(l, a+1, b+1)}, (l, a+1, b), \dots)$ 로 변경된다.

(2) S-확장(South Expansion): 기 구축된 사이클 C 는 간선 $e = ((l, a, b), (l, a+1, b))$ 를 포함하며, 정점 $(l, a, b-1)$ 과 $(l, a+1, b-1)$ 은 포함하지 않는 경우 간선 e 에 적용 가능한 S-확장 연산을 $S(C, e)$ 로 표기하며, C 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전후에 $C = (\dots, (l, a, b), (l, a+1, b), \dots)$ 에서 $C' = S(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l, a, b-1)}, \underline{(l, a+1, b-1)}, (l, a+1, b), \dots)$ 로 변경된다.

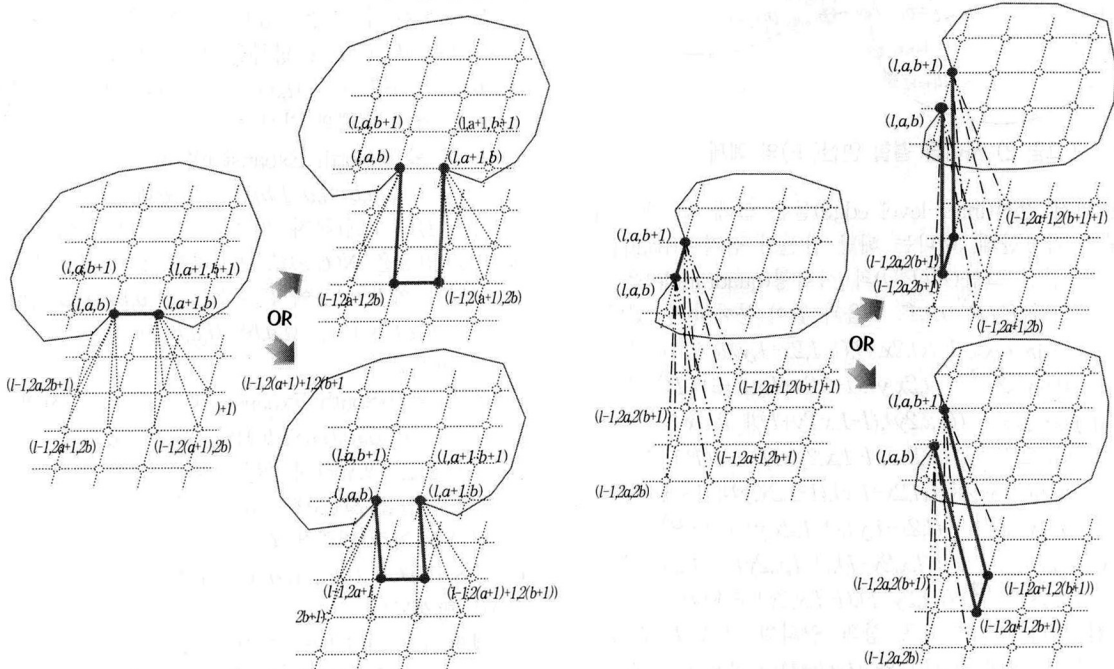
[정의 6] 피라미드 그래프 상의 임의의 계층 l ($1 \leq l < N-1$)에 속한 간선들 중 각각 x -방향 또는 y -방향을 따라 배열된 간선 $e_1 = ((l, a, b), (l, a+1, b))$ 및 $e_2 = ((l, a, b), (l, a, b+1))$ 를 포함하여 기 구축된 사이클 C 에 대해 z -방향을 따라 아래의 계층 $(l-1)$ 을 따라 인접된 정점들 $(l-1, 2a+1, 2b)$, $(l-1, 2(a+1), 2b)$, $(l-1, 2a+1, 2b+1)$, $(l-1, 2(a+1), 2b+1)$ 또는 $(l-1, 2a, 2b+1)$, $(l-1, 2a, 2(b+1))$, $(l-1, 2a+1, 2b+1)$, $(l-1, 2a+1, 2(b+1))$ 에 대해 다음과 같은 확장 연산을 정의할 수 있다.

(1) L^x -확장(x -direction Layer Expansion): 기 구축된 사이클 C 는 간선 $e = ((l, a, b), (l, a+1, b))$ 를 포함하고, 정점 $(l-1, 2a+1, 2b)$ 와 $(l-1, 2(a+1), 2b)$ 및 $(l-1, 2a+1, 2b+1)$ 와 $(l-1, 2(a+1), 2b+1)$ 은 포함되지 않는 경우 간선 e 에 적용 가능한 두 개의 L^x -확장 연산을 각각 $L^x_1(C, e)$ 및 $L^x_2(C, e)$ 로 표기하며, C 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전 $C = (\dots, (l, a, b), (l, a+1, b), \dots)$ 에서 확장 후 각각 $C' = L^x_1(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l-1, 2a+1, 2b)}, \underline{(l-1, 2(a+1), 2b)}, (l, a+1, b), \dots)$ 및 $C' = L^x_2(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l-1, 2a+1, 2b+1)}, \underline{(l-1, 2(a+1), 2b+1)}, (l, a+1, b), \dots)$ 로 변경된다.

(2) L^y -확장(y -direction Layer Expansion): 기 구축된 사이클 C 는 간선 $e = ((l, a, b), (l, a, b+1))$ 를 포함하고, 정점 $(l-1, 2a, 2b+1)$ 와 $(l-1, 2a, 2(b+1))$ 및 $(l-1, 2a+1, 2b+1)$ 와 $(l-1, 2a+1, 2(b+1))$ 은 포함되지 않는 경우 간선 e 에 적용 가능한 두 개의 L^y -확장 연산을 각각 $L^y_1(C, e)$ 및 $L^y_2(C, e)$ 로 표기하며, C 의 해당 부분 간선 구성 내역은 확장 전 $C = (\dots, (l, a, b), (l, a, b+1), \dots)$ 에서 확장 후 각각 $C' = L^y_1(C, e) = (\dots, (l, a, b), \underline{(l-1, 2a, 2b+1)}, \underline{(l-1, 2a, 2(b+1))}, (l, a, b+1), \dots)$



(그림 4) S-확장 및 N-확장 개념도



(a) L^x -확장 개념도

(b) L^y -확장 개념도

(그림 5) 계층간 간선 확장 개념도

및 $C' = L^y(C,e) = (\dots, (l,a,b), (l-1,2a+1,2b+1), (l-1,2a+1,2(b+1)), (l,a,b+1), \dots)$ 로 변경된다.

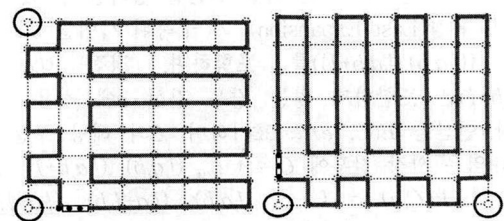
3. 내재된 사이클의 다양성 분석

본 절에서는 피라미드 그래프가 가지는 고유한 사이클 관련 특성들을 분석함으로써 다양한 종류의 사이클들을 구성할 수 있음을 보이고자 한다.

먼저 앞 절에서 정의된 사이클 결합 연산을 이용하여 인접된 사각형 형태의 사이클들을 확장시키는 일련의 과정을 통해 다양한 크기의 사이클들을 생성할 수 있음을 증명하고자 한다.

앞에서 정의한 각 확장 연산들의 적용 순서와 관련하여 임의대로 적용하였을 경우에 발생 가능한 문제점을 파악하기 위한 구체적인 방법의 일환으로써 어떤 상황에서 특정 정점들을 포함할 수 없게 되는지를 역으로 추적해 봄으로써 회피해야 할 조건(inhibit condition)들을 밝혀낼 수가 있는데 다음 보조정리가 이러한 의미로 해석될 수 있다.

[보조정리 2] 임의의 양의 정수값으로 주어진 높이 N 인 피라미드 그래프 P^N 내 임의의 계층 l ($1 \leq l \leq N-1$)에 속한 간선 중에서 해당 계층으로의 확장 진입 과정에 L^y -확장이 적용된 경우에는 x -축과 평행한 방향을 따라 배열된 간선



(a) 잘못된 W(E)-확장 (b) 잘못된 S(N)-확장
(그림 6) 잘못된 확장연산 적용 예(미포함 정점 발생)

$e=((l,a,b),(l,a+1,b))$ 에 대해 확장 연산 $N(C,e)$ 또는 $S(C,e)$ 적용 시 a 값은 짝수(even)일 경우에만 제한적으로 허용함으로써 해당 계층 내의 모든 정점들을 포함시킬 수 있다. 여기서 $1 \leq a, b < 2^{N-l} - 1$ 이다.

[증명] 본 증명을 위해 위 조건을 준수하지 못했을 경우에 예상할 수 있는 미포함 정점이 발생 가능한 반례를 (그림 6)의 예제 (b)를 통해 확인해 보임으로써 증명을 대신하고자 한다. □

위의 보조정리가 언급하는 바는 해당 계층으로 진입하는 과정에서 L^y -확장을 통해 진입된 경우에는 y -축과 평행한 방향으로 배열된 간선들에 대해서는 특별한 제한없이 W-확장 및 E-확장을 적용 가능하도록 권장하는 반면, x -축과 평행한 방향으로 배열된 간선들에 대해서는 조건이 만족되는

범위 내에서만 N-확장 및 S-확장을 적용하도록 제한을 가함으로써 해당 계층 내의 모든 정점들을 사이클 구성에 참여시키고자 하는 배려인 셈이다.

동일한 논리에 의해 x-축 및 y-축의 대칭성을 이용하면 해당 계층으로 진입하는 과정에서 L^x-확장이 적용된 경우에 대해서도 다음과 같은 보조정리도 성립됨을 알 수 있다.

[보조정리 3] 임의의 양의 정수값으로 주어진 높이 N인 피라미드 그래프 P^N 상의 임의의 계층 l (1 ≤ l ≤ N-1)에 속한 간선 중에서 해당 계층으로의 확장 진입 과정에 L^x-확장이 적용된 경우에는 y-축과 평행한 방향을 따라 배열된 간선 e=((l,a,b),(l,a,b+1))에 대해 확장 연산 E(C,e) 또는 W(C,e) 적용 시 b 값은 짝수(even)일 경우에만 제한적으로 허용함으로써 해당 계층 내의 모든 정점들을 포함시킬 수 있다. 여기서 1 ≤ a,b < 2^{N-l-1} 이다. □

위의 두 보조정리가 언급하고자 하는 바는 y-축 방향을 따라 진행되는 N-확장 및 S-확장과 x-축 방향을 따라 진행되는 W-확장 및 E-확장의 두 방향 모두를 자유롭게 방치했을 경우에 예상되는 계층 내 미포함 정점들을 사전에 방지하기 위해 두 방향 중 하나의 방향에 대해서는 제한된 범위 내의 간선들에 대해서만 확장 연산을 적용할 수 있도록 고려해야 할 조건을 제시하고 있다고 해석할 수 있다.

위의 보조정리들에서 언급하고 있는 바와 같이 최대 길이 사이클 구성을 방해하는 제약조건들에 대해서만 주의를 기울인다면 다양한 길이의 사이클들을 체계적으로 구성할 수 있음을 확인할 수 있는데 이러한 특성들을 다음 정리가 요약하고 있다고 해석할 수 있다.

[정리 1] 높이가 N(≥2)인 주어진 피라미드 P^N에는 1 ≤ l ≤ 2(4^{N-l}-1)/3을 만족하는 길이 (2l+1)의 사이클들이 모두 존재한다.

[증명] 사이클 길이를 나타내는 양의 정수 l에 대해 수학적 귀납법(induction)을 이용하여 증명하며, 앞에서 정의한 확장 연산을 연속적으로 적용함으로써 원하는 길이의 사이클을 생성할 수 있음을 보이고자 한다.

사이클의 크기를 확대시켜 나가기 위해 적용하게 될 일련의 확장 연산 과정에서는 일반성을 훼손하지는 않는다는 전제(without loss of generality) 하에 다음과 같은 기본원칙에 따라 진행된다고 가정한다.

- A. 확장 연산의 적용 과정에서 계층간 확장을 의미하는 L^x-확장이나 L^y-확장보다는 계층 내에서의 확장을 의미하는 E-확장, W-확장, N-확장, S-확장을 우선적으로 적용한다. 이 조건의 의미는 하나의 계층 내로의 진입 이후에는 인접된 계층으로 이동하기 전에 해당 계층 내에 존재하는 정점들을 우선적으로 포함시키기 위한 배려이다.
- B. 계층 상호간 확장 시 동일한 간선을 통한 중복 확장 방지를 위하여 짝수에서 홀수 계층으로의 확장 시에는 L^x-확장을 적용하고, 홀수에서 짝수 계층으로의 확장 시에는 L^y-확장을 번갈아 적용한다.
- C. 상위 계층으로부터 해당 계층으로 확장되는 과정에서 L^x-확장을 통해 내려온 경우에는 E-확장 또는 W-확장 적용 시 확장 대상 간선의 y-좌표값 중 작은 값이 짝수인 경우에만 허용하도록 제한적으로 적용한다((보조정리 3) 참조).
- D. 상위 계층으로부터 해당 계층으로 확장되는 과정에서

L^y-확장을 통해 내려온 경우에는 N-확장 또는 S-확장 적용 시 확장 대상 간선의 x-좌표값 중 작은 값이 짝수인 경우에만 허용하도록 제한적으로 적용한다((보조정리 2) 참조).

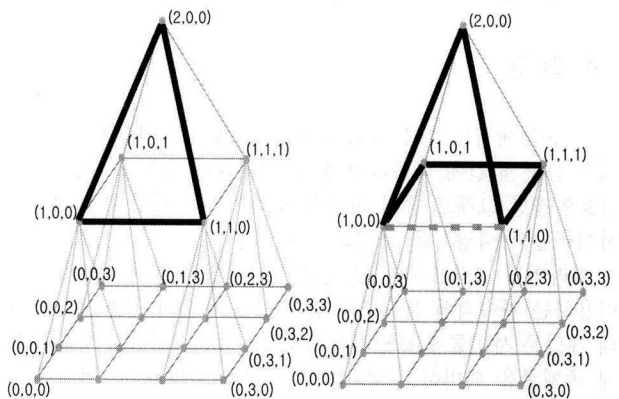
위의 가정 하에서 수학적 귀납법 적용을 위해 다음과 같이 각 경우에 대해 구체적으로 고려해본다.

(1) l=1 및 l=2인 경우에 대해서는 상위 두 개 계층에 해당하는 계층 (N-1) 및 계층 (N-2)에 해당하는 정점들로 구성된 길이 3 및 5에 해당하는 사이클들을 쉽게 구성할 수 있음을 (그림 7)에서 확인할 수 있다.

(2) l=k-1, 3 ≤ k < 2(4^{N-l}-1)/3 인 경우에 성립한다고 가정하면 길이가 (2k-1)인 사이클이 생성될 수 있음을 의미한다. 이는 실제로 길이 3의 초기화된 삼각형으로부터 시작하여 연속된 (k-2)회에 걸친 확장 연산을 통하여 생성이 가능하다. 이 과정에서 위의 가정들을 위배하지 않는 범위 내에서 최상위 계층으로부터 순차적으로 완전하게 채운 다음 차하위 계층으로 내려가는 형식을 취하면서 사이클을 확장시키는 연산을 적용한 결과 현재 계층 L(0 ≤ L ≤ N-3)에 머무르고 있다고 가정한다.

(3) l=k, 4 ≤ k ≤ 2(4^{N-l}-1)/3 인 경우에 대해서는 현재 머무르고 있는 계층 L의 값에 따라 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 고려한다.

- ① 계층 L이 최하위 계층인 경우(L=0): 이 경우에는 최대 크기의 사이클을 의미하는 헤밀톤 사이클이 이미 완성된 경우가 아닌 이상 반드시 현재 작업 중인 계층 L 내에 N-확장, S-확장, W-확장 또는 E-확장을 적용할 수 있는 대상 간선이 하나 이상 존재할 것이며, 이를 대상으로 적용 가능한 해당 확장 연산을 적용시킴으로써 적용 이전의 사이클 길이 (2k-1)에 +2만큼의 길이 연장 효과로 인해 적용 후에는 길이 (2k+1)에 해당하는 사이클이 생성될 수 있음을 알 수 있다.
- ② 계층 L이 최하위 계층이 아닌 경우(L≠0): 이 경우는 다시 현재 작업 수행 중인 계층 L 내에 존재하는 정점들 중에서 아직 사이클에 포함되지 않고 남아있는 정점의 존재 여부에 따라 아래와 같이 두 가지 경우로 세분화시켜 고려한다.



(a) l=1, 길이 3 (b) l=2, 길이 5
(그림 7) 기본적인 두 경우의 사이클 구성 예 (N=3)

(ㄱ) 계층 L 내에 아직도 사이클에 포함되지 않은 채로 남아있는 정점이 존재하는 경우: 이 경우는 앞의 ①에서와 동일하게 처리함으로써 N -확장, S -확장, W -확장, E -확장 중 하나를 적용함으로써 길이 $(2k+1)$ 에 해당하는 사이클이 생성될 수 있음을 알 수 있다.

(ㄴ) 계층 L 내에는 더 이상 사이클에 포함되지 않은 채로 남아있는 정점이 존재하지 않는 경우: 이 경우는 인접 계층간 확장 연산에 해당하는 L^x -확장 또는 L^y -확장 연산을 이용하여 차하위 계층으로 확장시키는 연산을 적용하되 L 값의 짝수/홀수 여부에 따라 가정 B 를 적용함으로써 항상 사이클 특성을 유지하면서 확장 연산이 가능한 간선을 찾아 해당 확장 연산을 적용할 수 있음을 알 수 있다. 이 경우에도 앞에서 언급한 바와 마찬가지로 적용 이전의 사이클 길이 $(2k-1)$ 에 +2 만큼의 확장 효과로 인해 적용 후에는 길이 $(2k+1)$ 에 해당하는 사이클이 생성될 수 있음을 확인할 수 있다.

따라서 위의 모든 경우에서 $l=k-1$ 인 경우에 생성된 사이클을 기반으로 하여 단 한 번의 확장 연산을 적용시킴으로써 적용 이전의 사이클 길이 $(2k-1)$ 에 +2 만큼의 확장 효과로 인해 적용 후에는 길이 $(2k+1)$ 에 해당하는 사이클이 생성될 수 있음을 확인할 수 있으며, 이는 바로 $l=k$ 인 경우에 대해서도 정리가 성립됨을 의미한다. □

위의 정리가 의미하는 바는 높이가 N 인 피라미드 P^N 에는 길이가 최소 3이상 최대 $(4^N-1)/3$ 에 해당하는 모든 홀수(odd) 길이의 사이클이 존재한다는 것이다.

아울러 다음 정리는 짝수(even) 길이 사이클과 관련된 특성을 보여주고 있다.

[정리 2] 높이가 $N(\geq 2)$ 인 주어진 피라미드 P^N 에는 $2 \leq l \leq 2(4^{N-1}-1)/3$ 를 만족하는 길이 $2l$ 의 사이클들이 모두 존재한다.

[증명] 앞의 (정리 1)에서와 동일한 논리로 접근하되 시작 시점의 초기 사이클 구성을 최상위 레벨의 유일한 노드에 해당하는 노드 $(N-1,0,0)$ 를 제외시킨 상태에서 두 번째 상위 레벨에 존재하는 길이 4인 사이클 $((N-2,0,0), (N-2,1,0), (N-2,1,1), (N-2,0,1))$ 로부터 출발하여 각 확장을 연속적으로 적용시킴으로써 유사한 방법으로 쉽게 증명할 수 있다. □

위의 두 정리들을 종합해보면 피라미드 그래프에는 최소길이 사이클에 해당하는 길이 3부터 최대길이 사이클에 해당하는 길이 $(4^{N-1}-1)/3$ 의 헤밀톤 사이클까지 다양한 사이클들이 모두 내재되어 있음을 의미한다.

4. 결론

본 논문에서는 다중 병렬처리시스템에서의 영상처리 및 그래프 문제 해결에 다양하게 응용됨에 따라 관심을 받고 있는 상호연결망 그래프 중의 하나인 피라미드를 대상으로 내재된 사이클들의 다양성을 분석하였다.

피라미드 그래프 내에 존재하는 사각형 구조의 사이클들을 이용하는 연속적인 사이클 확장 연산을 통해서 최소 3이상 최대 헤밀톤 사이클에 해당하는 모든 길이의 사이클들이 다양하게 존재함을 의미하는 범사이클 특성을 증명할 수 있었다.

이러한 상호연결망 내에서의 사이클 길이의 다양성을 분석한 연구가 갖는 의의는 그래프 이론적인 의미뿐만 아니라 다중 프로세서들로 구성된 병렬처리시스템 상에서 프로세서 상

호간 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전송과정에서 사이클을 하부 구조로 이용하게 되는 응용 등에서 실질적인 활용이 가능할 것으로 기대된다.

참고 문헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [4] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes," *Morgan Kaufmann Pub., CA.*, 1992.
- [5] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," *SIAM J. on Comput.*, Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [6] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," *Proc. of the IEEE*, pp.982-995, 1988.
- [7] D. M. C. Ip, C. K. Y. Ng, L. K. L. Pun, M. Hamdi, and I. Ahmad, "Embedding Pyramids into 3D Meshes," *Proc. of 1993 Int'l Conf. on Paral. and Distrib. Sys.*, pp.348-352, 1993.
- [8] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," *Nordic J. of Computing*, Vol.2, No.3, pp.326-337, 1995.
- [9] 장정환, "피라미드의 3-차원 메쉬로의 신장을 개선 임베딩", 정보처리학회논문지A, Vol.10-A, No.6, pp.627-634, 2003.
- [10] 장정환, "피라미드 그래프의 헤밀톤 특성", 정보처리학회논문지A, Vol.13-A, No.3, pp.253-260, 2006.
- [11] <http://mathworld.wolfram.com/PancyclicGraph.html>.
- [12] J. -H. Park, H. -S. Lim and H. -C. Kim, "Panconnectivity and pancyclicity of hypercube-like interconnection networks with faulty elements," *Theoretical Computer Science*, 377(1-3), pp.170-180, 2007.
- [13] Y. C. Tseng, D. K. Panda and T. H. Lai, "A Trip-based Multicasting Model in Wormhole-routed Networks with Virtual Channels," *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.7, No.2, pp.138-150, 1996.



장정환

e-mail : jhchang@pufs.ac.kr
 1983년 경북대학교 전자공학과(공학사)
 1985년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과(공학석사)
 1998년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과(공학박사)
 1985년~2000년 (주)케이티(KT) 선임연구원
 2000년~현 재 부산외국어대학교
 디지털미디어학부 부교수

관심분야: 상호연결망, 그래프 이론 및 응용, 통신망 보안 등