보간법을 이용한 수치적분법의 평균 오차에 관한 연구

최 성 희† · 황 석 형† · 이 정 배† · 홍 범 일††

요 약

이 논문에서는 정적분의 근사값을 계산하는 여러 적분 문제 중에서 보간법을 사용하는 수치적분법의 평균오차에 대해서 연구한다. 특히 가장 널리 쓰이고 있는 방법 중의 하나인 복합 *Newton-Cotes* 구적법의 평균오차에 대해서 연구한다. 주어진 구간을 등간격으로 나누었을 때, 각 점에서의 함수값을 information으로 사용할 경우, 복합 *Newton-Cotes* 구적법의 평균오차를 계산하였으며, 이 때 이 오차는 가장 최소임을 이 논문에서 증명한다.

On the Average Case Errors of Numerical Integration Rules using Interpolation

Sung Hee Choi† · Suk Hyung Hwang† · Jeong Bae Lee† · Bum Il Hong††

ABSTRACT

Among many algorithms for the integration problems in which one wants to compute the approximation to the definite integral in the average case setting, we study the average case errors of numerical integration rules using interpolation. In particular, we choose the composite *Newton-Cotes* quadratures and the function values at equally spaced sample points on the given interval as information. We compute the average case error of composite *Newton-Cotes* quadratures and show that it is minimal(modulo a multiplicative constant).

키워드 : 컴퓨터이론(Complexity Theory, Information-based Complexity, Partial Information), 평균오차(Average Case Error), 수치구적법(Numerical quadratures), 복합 Newton-Cotes 구적법(Newton-Cotes Quadratures)

1. 서 론

컴퓨터를 사용하는 computational complexity 계산 문제에서는 문제를 풀기 위해 필요한 모든 데이터가 주어지는 것이 아니라 유한개의 데이터만 주어지기 때문에 정확한 해(true solution)를 구하지 못하고 근사값(approximation)만을 구하게 된다. 예를 들어, 함수 집합 상에서 정의된 문제에서는, 일반적으로 함수에 대한 information은 유한개의 함수값으로 구성된다. 이 유한개의 함수값을 partial information이라 부르며, Information-Based Complexity 분야의 문제에서는 우선 유한개의 information을 계산하고, 이 partial information을 어떤 한 algorithm에 적용하여 근사값을 계산하게 된다. 이때 이 근사값에는 오차가 발생하게 되는데 이 오차는 주어지는 information에 따라, 또한 어떤 algorithm을 선택하느냐에 따라 그 값이 다르게 된다. 따라서 오차가 가장 적은 근사값을 계산하기 위해서는 적정한 information과 적절한 algorithm을 선택해야 한다.

† 종신회원 : 선문대학교 컴퓨터정보학부 교수
†† 정 회 원 : 경희대학교 수학과 교수
논문접수 : 2004년 6월 30일, 심사완료 : 2004년 9월 13일

정확한 해와 근사값 사이에 발생하는 오차(error)는 주어진 문제의 setting에 따라 다르게 정의되는데 이 논문에서는 일반화된 함수 집합 상에서의 문제를 연구하기 위해 Average Case Setting을 선택하였다. 이 setting에서의 한 algorithm의 오차는, 함수의 집합 F에 주어진 probability measure에 따라 모든 함수에서 발생하는 오차들의 평균값(이를 Average Case Error 또는 평균오차라고 부른다)으로 정의된다. 이 평균오차는 어떤 probability measure를 선택하느냐에 따라서도 달라진다.

이 논문에서는 함수 집합 상에서 정의된 여러 문제들 중에서 적분 문제(Integration problem)의 average case error에 대하여 연구한다. 적분 문제에서는 정적분

$$I(f) = \int_0^1 f(t)\, dt$$

의 값을 수치 적분법(Numerical Quadratures)을 사용하여 구하게 된다. 여기서 함수 f는 k번째 도함수가 연속인 함수들의 집합 F에 속한다(여기서 k는 0이상의 정수를 나타낸다). 즉,

$$F = \{f \mid f \in C^k[0,1]\}$$

평균값을 구하기 위해서는 probability measure가 함수 집합 상에 주어져야 하는데, 함수 집합 상에서 정의되는 문제에서 가장 많이 쓰이고 또한 물리학이나 통계학, 그리고 이공계 여러 분야에서 많이 쓰이는 k-fold Wiener measure를 이 논문에서 선택하였다.

정적분 $I(f)$에 대한 근사값은 유한개의 함수값으로 이루어진 information $N(f)$

$$N(f) = [f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)]$$

에 의해 계산된다.(여기서 $x_i \in [0,1]$이다) 이 때 이 근사값을 $\phi(N(f))$으로 표시하며 여기서 ϕ는 적분값을 구하는 하나의 algorithm이다. 이 논문에서는 여러 적분 algorithm 중에서 함수값을 계산하기 위해 보간법(Interpolation)을 사용하는 복합 Newton-Cotes 구적법을 사용한다.

이 논문에서는 적분값을 구하기 위해 구간 [0, 1]에서 n개의 등간격점을 취하여 그 점에서의 함수값들을 information으로 사용하며 이 경우 양의 정수 p에 대해 평균오차가 $n^{-\min\{p,k+1\}}$에 비례한다는 것을 증명한다.

또한 n개의 함수값을 사용하는 적분문제에서의 평균오차는 $\Omega(n^{-(k+1)})$ 임이 증명되어 있기 때문에([1, 5] 참조) 복합 Newton-Cotes 구적법의 평균오차가 최소가 된다는 것을 증명한다.

2. 용어 정의

평균오차를 계산하기 위하여 이 논문에서는, k번째 도함수가 연속인 함수들의 집합 F상에 k-fold Wiener measure가 주어진다고 가정한다. k-fold Wiener measure ω_k([3, 6, 8] 참조)는 Gaussian measure로써 평균이 0이고 correlation function이

$$\begin{aligned} E(f(x)f(y)) &= \int_F f(x)f(y)\,\omega_k(df) \\ &= \int_0^1 \frac{(x-t)_+^k}{k!}\,\frac{(y-t)_+^k}{k!}\,dt \end{aligned}$$

인 measure이다. 여기서

$$(z-t)_+ = \max\{0,\ z-t\}$$

를 의미한다. 즉, 함수 f는 평균이 0이고 autocorrelation이 위와 같은 Gaussian stochastic process이며

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k)}(0) = 0$$

인 함수이다.

함수 f에 대한 information $N(f)$는 n개의 함수값으로 구성된다. 이 $N(f)$를 이용하여 근사값 $\phi(N(f))$가 계산되는데 여기서 ϕ는 주어진 $N(f)$를 근사값에 대응시키는 임의의 mapping이며 algorithm이라고도 불린다([4, 7] 참조). 이 논문에서는 여러 적분 algorithm 중에서 함수값을 계산하기 위해 보간법(Interpolation)을 사용하는 복합 Newton- Cotes 구적법을 사용한다.

복합 Newton-Cotes 구적법을 사용하기 위하여 우선 구간 [0, 1]을 n개의 소구간으로 등분한다. $x_0 = 0$, $x_n = 1$이라 하고, 각 소구간의 길이를 $h = x_{i+1} - x_i = 1/n$ 이라 하자. 그리고 다시 각각의 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$을 $p-1$개의 소구간으로 등분했을 때 이 소구간에서의 적분값을

$$I_i(f) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$$

라하고 $A_i(f)$를 이 소구간에서 함수 f의 $p-1$차 보간 다항식(Interpolating polynomial of degree $p-1$)을 적분하여 구한 근사값이라 하면, 이 구간에서의 오차 X_i는

$$X_i = I_i(f) - A_i(f)$$

가 되며, 구간 [0, 1]에서의 오차는

$$\begin{aligned} X = \sum_{i=0}^{n-1} X_i &= \sum_{i=0}^{n-1} [I_i(f) - A_i(f)] \\ &= I(f) - A(f) \end{aligned}$$

이다. 여기서 $A(f)$는 보간법을 사용하는 구적법인 복합 Newton-Cotes구적법을 나타낸다.

$N(f)$를 사용하는 algorithm ϕ의 평균 오차는

$$\begin{aligned} e^{avg}(\phi, N) &= \sqrt{E(\{I(f) - \phi(N(f))\}^2)} \\ &= \sqrt{\int_F |I(f) - \phi(N(f))|^2 \omega_k(df)} \end{aligned}$$

로 정의된다. 즉 $e^{avg}(\phi, N)$은 해(true solution $I(f)$)와 근사값($\phi(N(f))$)들의 표준편차로 정의된다. 따라서 구적법 A의 평균 오차는

$$\begin{aligned} e^{avg}(A, N) &= \sqrt{E(\{I(f) - A(f)\}^2)} \\ &= \sqrt{E(X^2)} \end{aligned}$$

이 된다. n개의 information을 사용하는 모든 적분 algorithm의 평균 오차는

$$e^{avg}(\phi, N) = \Omega(n^{-(k+1)})$$

인 것이 알려져 있다([1, 5] 참조).

3. 복합 Newton-Cotes구적법의 평균 오차

복합 Newton-Cotes 구적법을 사용하기 위하여 우선 구간 [0, 1]을 n개의 소구간으로 등분한다. $x_0=0$, $x_n=1$이라 하고, 각 소구간의 길이를 $h=x_{i+1}-x_i=1/n$이라 하며 다시 각각의 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$을 $p-1$개의 소구간으로 등분하여 $\zeta_1=x_i$, $\zeta_p=x_{i+1}$, $\zeta_{j+1}-\zeta_j=h/(p-1)$이라 하자. 이 소구간에서의 적분값을

$$I_i(f)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$$

라하고 $A_i(f)$를 이 소구간에서 함수 f의 $p-1$차 보간 다항식을 적분하여 구한 근사값이라 하면, 이 구간에서의 오차 X_i는 $X_i=I_i(f)-A_i(f)$가 된다. 함수 f는 평균이 0인 Gaussian process이기 때문에 적분 오차 X_i도 평균이 0인 Gaussian random variable로써 covariances는 다음과 같다.

[Lemma] $i\le j$이고, $k<p$일 때,

$$E(X_iX_j)=\begin{cases}\Theta(h^{2k+3}), & \text{if } i=j\\ 0, & \text{if } i<j\end{cases}$$

[Proof] ① $i=j$인 경우: a_r이 임의의 상수이며 $x, \zeta_r\in[x_i, x_{i+1}]$이고 $t\in[x_{i+1}, 1]$이면 $(x-t)_+^k=(\zeta_r-t)_+^k=0$이 된다. 따라서

$$\begin{aligned}E(X_i^2)=&\int_0^1\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x-t)_+^k}{k!}dx-\sum_{r=1}^k a_r\frac{(\zeta_r-t)_+^k}{k!}\right]^2dt\\ =&\int_0^{x_{i+1}}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x-t)_+^k}{k!}dx-\sum_{r=1}^k a_r\frac{(\zeta_r-t)_+^k}{k!}\right]^2dt\end{aligned}$$

이다. 이 때 0과 x_{i+1}에서의 적분을 0과 x_i사이에서의 적분과 x_i와 x_{i+1}사이에서의 적분으로 나누어 각각을 I_0와 I_1이라 하자. 그러면 t가 구간 $[0, x_i]$에 있을 때

$$I_0=\int_0^{x_i}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x-t)^k}{k!}dx-\sum_{r=1}^k a_r\frac{(\zeta_r-t)^k}{k!}\right]^2dt$$

이며, 위 식의 대괄호 [ ] 안에서 왼쪽 항은 k차 다항식 $\frac{(x-t)^k}{k!}$의 정적분 값이고, 오른쪽 항은 이 다항식의 보간 다항식에 대한 적분 공식이다.

그런데 한 다항식에 대한 보간 다항식은 다항식 그 자체와 같으므로 위 두 항의 값은 같게 된다. 따라서

$$I_0=0 \tag{1}$$

이다. 그리고 구간 $[x_i, x_{i+1}]$에서는

$$I_1=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x-t)_+^k}{k!}dx-\sum_{r=1}^k\frac{a_r(\zeta_r-t)_+^k}{k!}\right]^2dt$$

이다. 여기서 $z=\frac{x-x_i}{h}$, $u=\frac{t-x_i}{h}$, $\zeta_r'=\frac{\zeta_r-x_i}{h}$라 하면

$$\begin{aligned}I_1=&\int_0^1\left[\int_0^1\frac{h^k(z-u)_+^k}{k!}h\,dz-\sum_{r=1}^k h\,C_r\frac{h^k(\zeta_r'-u)_+^k}{k!}\right]^2h\,du\\ =&\,h^{2k+3}\int_0^1\left[\int_0^1\frac{(z-u)_+^k}{k!}dz-\sum_{r=1}^k C_r\frac{(\zeta_r'-u)_+^k}{k!}\right]^2du\end{aligned}$$

이다. 여기서 C_r은 구간 [0, 1]에서 사용할 구적법에서의 계수이다. 그런데 마지막 수식에서의 적분값은 h와 무관하므로 이를 K라 하면

$$I_1=K\cdot h^{2k+3} \tag{2}$$

이 된다. 따라서 식 (1)과 식 (2)에 의해

$$E(X_i^2)=I_0+I_1=K\cdot h^{2k+3}=\Theta(h^{2k+3})$$

② $i<j$인 경우 : $\zeta_r\in[x_i, x_{i+1}]$, $\xi_r\in[x_j, x_{j+1}]$에 대해서

$$B_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(x-t)_+^k}{k!}dx-\sum_{r=1}^k a_r\frac{(\zeta_r-t)_+^k}{k!}$$

$$B_j=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(y-t)_+^k}{k!}dy-\sum_{r=1}^k a_r\frac{(\xi_r-t)_+^k}{k!}$$

라 하면

$$\begin{aligned}E(X_iX_j)&=\int_0^1 B_iB_jdt=\int_0^{x_{i+1}}B_iB_jdt\\ &=\left(\int_0^{x_i}+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\right)B_i\cdot B_jdt\end{aligned}$$

이다. 여기서 위 식의 첫 번째 적분을 I_0, 두 번째 적분을 I_1이라 한다면, $t\in[0, x_i]$에서는 $\frac{(x-t)^k}{k!}$과 $\frac{(y-t)^k}{k!}$

은 k차 다항식이므로 $B_i = B_j = 0$이 되어 $I_0 = 0$이다. $t \in [x_i, x_{i+1}]$에서는 $\frac{(y-t)^k}{k!}$이 k차 다항식이 되므로 $B_j = 0$이 되어 $I_1 = 0$이다. 따라서 $E(X_iX_j) = 0$이 된다.

위의 Lemma를 이용하여 복합 Newton-Cotes 구적법 A의 평균 오차를 구하면 다음과 같다.

[Theorem] 보간법을 사용하는 구적법인 복합 Newton-Cotes 구적법 A의 평균 오차는

$$e^{avg}(A, N) = \begin{cases} \Theta\left(\frac{1}{n^p}\right), & \text{if } k \ge p, \\ \Theta\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), & \text{if } k < p \end{cases}$$

여기서 k는 함수의 regularity degree이며, 즉 $f \in C^k[0,1]$이고, p는 구적법에서 사용된 보간 다항식의 차수 $p-1$에서의 p를 나타낸다.

[Proof] ① $k \ge p$인 경우: $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$에 대하여 각 소구간 $[x_i, x_{i+1}]$에서의 오차 X_i는

$$X_i = I_i(f) - A_i(f) = c \cdot h^{p+1} \cdot f^{(p)}(\xi_i)$$

이다. 따라서 전 구간 [0, 1] 에서의 오차는

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=0}^{n-1} X_i = \sum_{i=0}^{n-1} [I_i(f) - A_i(f)] \\ &= I(f) - A(f) \end{aligned}$$

이다. 복합 Newton-Cotes 구적법 A의 평균오차는

$$\begin{aligned} e^{avg}(A, N) &= \sqrt{E(X^2)} \\ &= \sqrt{E(\{I(f) - A(f)\}^2)} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} e^{avg}(A, N)^2 &= E(X^2) \\ &= E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} I_i(f) - A_i(f)\right)^2\right] \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-t)_+^k}{k!}\,dx \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. - \sum_{r=1}^{p} a_r \frac{(\zeta_r - t)_+^k}{k!}\right)\right]^2 dt \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$에 대하여 $f_t(\xi_i) = \frac{(\xi_i - t)_+^k}{k!}$라 하고, $\xi_i \ge x_{2n/3} = 2nh/3 = 2/3$이고 $t \le x_{2n/3} = nh/3 = 1/3$이면 $\xi_i - t \ge 1/3$ 이 되므로

$$\begin{aligned} e^{avg}(A, N)^2 &= \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n-1} ch^{p+1} f_t^{(p)}(\xi_i)\right]^2 dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n-1} ch^{p+1} \frac{(\xi_i - t)_+^{k-p}}{(k-p)!}\right]^2 dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} ch^{p+1} \frac{(\xi_i - t)_+^{k-p}}{(k-p)!}\right]^2 dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=j}^{n-1} ch^{p+1} \frac{(\xi_i - t)^{k-p}}{(k-p)!}\right]^2 dt \\ &\ge \sum_{j=0}^{n/3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=2n/3}^{n-1} ch^{p+1} \frac{(\xi_i - t)^{k-p}}{(k-p)!}\right]^2 dt \\ &\ge \sum_{j=0}^{n/3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=2n/3}^{n-1} ch^{p+1} \frac{(1/3)^{k-p}}{(k-p)!}\right]^2 dt \end{aligned} \tag{3}$$

이다. 여기서

$$c_p = \frac{(1/3)^{k-p}}{(k-p)!}, \quad K_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{c \cdot c_p}{3}\right)^2$$

이라 하면, $n \times h = 1$이므로

$$\begin{aligned} &e^{avg}(A, N)^2 \\ &\quad \ge \sum_{j=0}^{n/3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=2n/3}^{n-1} ch^{p+1} c_p\right]^2 dt \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n/3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{n}{3} ch^{p+1} c_p\right]^2 dt \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n/3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{c \cdot c_p}{3}\right)^2 h^{2p}\, dt \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n/3} \left(\frac{c \cdot c_p}{3}\right)^2 h^{2p} h \\ &\quad = \frac{n}{3} \left(\frac{c \cdot c_p}{3}\right)^2 h^{2p+1} \\ &\quad = K_1 h^{2p} \end{aligned}$$

따라서

$$e^{avg}(A, N)^2 \ge K_1 \cdot h^{2p} \tag{4}$$

이다.

또한 $c' = \frac{1}{(k-p)!}$, $K_2 = (c \cdot c')^2$이라 하면, 식 (3)으로부터

$$\begin{aligned} &e^{avg}(A, N)^2 \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} ch^{p+1} \frac{(\xi_i - t)_+^{k-p}}{(k-p)!}\right]^2 dt \\ &\quad \le \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} ch^{p+1} \frac{1}{(k-p)!}\right]^2 dt \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\sum_{i=0}^{n-1} ch^{p+1} c'\right]^2 dt \\ &\quad = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} (c \cdot c' \cdot h^{p+1} \cdot n)^2\, dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (c \cdot c')^2 h^{2p} \cdot h$$
$$= (c \cdot c')^2 h^{2p} \cdot h \cdot n$$
$$= K_2 \cdot h^{2p}$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$e^{avg}(A, N)^2 \leq K_2 \cdot h^{2p} \tag{5}$$

이므로 식 (4)와 식 (5)에 의해

$$e^{avg}(A, N) = \Theta\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

이 된다.

② $k < p$인 경우 : $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$에 대하여,
구간 $[x_i, x_{i+1}]$에서의 오차 X_i는

$$X_i = I_i(f) - A_i(f) = c \cdot h^{k+1} \cdot f^{(k)}(\xi_i)$$

이며, 평균오차는

$$e^{avg}(A, N)^2 = E(X^2) = E\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right)^2\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2) + 2\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j>i}^{n-1} E(X_i X_j)$$

이다. 앞 Lemma의 결과에 의해

$$e^{avg}(A, N)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} E(X_i^2) = \sum_{i=0}^{n-1} c\, h^{2k+3}$$
$$= c\, h^{2k+3} n = c \cdot h^{2k+2}$$

이 된다.

4. 결 론

앞 장의 정리에 의해 등간격점에서의 함수값을 information으로 사용하고, 보간법을 사용하는 수치 구적법에서의 평균 오차는

$$e^{avg}(A, N) = \Theta\left(\frac{1}{n^{\min\{p,\, k+1\}}}\right)$$

이 된다는 것을 알았다. 특히 $p = 4$인 경우 이는 Newton-Cotes 구적법 중에서 Simpson 구적법에 해당되며, 이 때의 결과는 [2]에서의 결과와 일치한다. 또한 n개의 함수 값으로 구성된 information을 사용하는 모든 알고리즘의 평균 오차는

$$e^{avg}(\phi, N) = \Omega(n^{-(k+1)})$$

이므로([6] 참조), $k < p$인 경우 보간법을 사용하는 구적법, 즉 Newton-Cotes 구적법의 평균 오차는 최소가 된다.

참 고 문 헌

[1] Bakhvalov, N. S., "On Approximate Calculation of Integrals (in Russian)," Vestnik MGV, Ser. Mat. Mekh. Astron. Fiz. Khim, Vol.4, pp.3-18, 1959.

[2] Choi, Sung Hee, "Probabilistic Analysis of Simpson's Quadrature," J. of Complexity, 10, pp.384-410, 1994.

[3] Kuo, H. H., "Gaussian Measures in Banach Spaces," Lecture Notes in Mathematics No.463, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[4] Novak, E., "Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis," Lecture Notes in Mathematics No. 1349, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[5] Sacks, J. and Ylvisaker, D., "Statistical Design and Integral Approximation," in Proceeding of the 12th Biennial Seminary of the Canadian Mathematical Congress, pp.115-136, 1970.

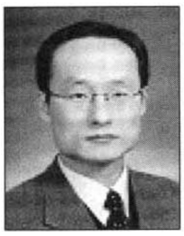
[6] Skorohod, A. V., Integration in Hilbert Sapce, Springer-Verlag, New York, 1974.

[7] Traub, J. F., Wasilkowski, G.W. and Wozniakowski, H., Information-Based Complexity, Academic Press, San Diego, 1988.

[8] Vakhania. N. N., Probability Distributions on Linear Spaces, North-Holland, New York, 1981.

최 성 희

e-mail : shchoi@sunmoon.ac.kr
1977년 서강대학교 수학과(이학사)
1988년 미국 Penn. State Univ. 대학원 (이학석사)
1994년 미국 Univ. of Kentucky 대학원 (이학박사)
1977년~1982년 국방과학연구소 연구원
1995년~현재 선문대학교 컴퓨터정보학부 교수
관심분야 : Complexity 이론, 수치해석, 계산이론, 컴파일러



황 석 형

e-mail : shwang@sunmoon.ac.kr
1991년 강원대학교 전자계산학과(이학사)
1994년 일본 오사카대학교 대학원 정보공학과(공학석사)
1997년 일본 오사카대학교 대학원 정보공학과(공학박사)
1997년~현재 선문대학교 컴퓨터정보학부 부교수
2001년~현재 국방대학교 국방정보화사업 관리과정 외래강사
2001년~현재 일본 OGIS-RI Co. LTD. Certified UML Engineer
관심분야 : 객체지향 소프트웨어 시스템의 재구성 및 재이용, UML, Design Pattern, Adaptive Programming 기법, Formal Method 등

이 정 배

e-mail : jblee@sunmoon.ac.kr

1981년 경북대학교 전자공학과 전자계산 전공(공학사)
1983년 경북대학교 대학원 전자공학과 전자계산전공(공학석사)
1995년 한양대학교 대학원 전자공학과 정보통신전공(공학박사)
1982년~1991년 한국전자통신연구원 선임연구원
1991년~2002년 부산외국어대학교 컴퓨터·전자공학부 부교수
2002년~현재 선문대학교 컴퓨터정보학부 부교수
관심분야 : 실시간 시스템, 임베디드 시스템, 실시간 통신 프로토콜

홍 범 일

e-mail : bihong@khu.ac.kr

1979년 서강대학교 수학과(이학사)
1989년 미국 Purdue University 전자계산학과(이학석사)
1990년 미국 Purdue University 수학과(이학박사)
1996년~현재 경희대학교 수학과 교수
관심분야 : 수치해석학, 뉴랄 네트웍, 전자계산학