

# 피라미드의 3-차원 메쉬로의 신장율 개선 임베딩

장 정 환†

요 약

본 논문에서는 주어진 손님 그래프 모델의 정점들과 간선들을 신장율, 혼잡율, 확장율 등의 성능 파라미터들을 보다 우수하게 유지하면서 주인 그래프의 대응되는 정점들 및 경로들로 매핑시키는 “그래프 임베딩 문제”라고 불리는 그래프이론 문제를 다룬다. 먼저 높이가  $N$ 인 피라미드 모델을 높이가  $(4^{N+1/3}+2)/3$ 이고 2-차원 정방형 메쉬의 한 변의 길이가  $2^{2N-1/3}$ 인 3-차원 메쉬 구조의 대규모 병렬처리시스템으로 임베딩 할 수 있는 새로운 매핑 함수를 제안하고, 해당 임베딩 하에서 인접된 두 정점들 상호간 통신에 필요한 단계의 수를 반영하는 신장율의 관점에서 성능을 분석한다. 본 임베딩의 신장율이  $(2 \cdot 4^{N-2/3}+4)/3$ 임을 증명한다. 이러한 결과는 동일한 조건 하에서 기존의 결과인  $4^{N-2/3}$ 보다 우수한 것이다.

## A Dilation-Improved Embedding of Pyramids into 3-Dimensional Meshes

Jung-Hwan Chang†

ABSTRACT

In this paper, we consider a graph-theoretic problem, the so-called “graph embedding problem” that maps the vertices and edges of the given guest graph model into the corresponding vertices and paths of the host graph under the condition of maintaining better performance parameters such as dilation, congestion, and expansion. We firstly propose a new mapping function which can embed the pyramid model with height  $N$  into the 3-dimensional mesh massively parallel processor system with the height  $(4^{N+1/3}+2)/3$  and the regular 2-dimensional mesh of one side  $2^{2N-1/3}$ , and analyze the performance of the embedding in terms of the dilation parameter that reflects the number of communication steps between two adjacent vertices under the embedding. We prove that the dilation of the embedding is  $(2 \cdot 4^{N-2/3}+4)/3$ . This is superior to the previous result of  $4^{N-2/3}$  under the same condition.

키워드 : 임베딩(Embedding), 피라미드(Pyramid), 메쉬(Mesh), 신장율(Dilation)

### 1. 개 요

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 노드들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들을 비교 분석하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제

가 대두하게 되었다[1, 2].

지난 십 수년간 큰 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube 또는 (이진)  $n$ -큐브)를 꼽을 수 있으며[3], 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 또한 병렬처리분야에서 비교적 잘 알려진 상호연결망 구조 중 하나로 널리 이용되고 있는 실정이다[4, 5].

높이  $N$ 인 피라미드(pyramid)의 경우  $(4^N-1)/3$ 개의 정점들을 갖는 계층적 구조의 그래프로써 오늘날 각광을 받고 있는 멀티미디어 분야의 저 레벨에서의 픽셀 단위 영상처리 관련 기능을 효율적으로 처리해 줄 수 있는 구조적 특성으로 인해 관련 분야를 중심으로 널리 이용되어 왔으나 오늘날은 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조를 다양하게 활용함으로써 그래프 관련 기본문제들의 해결에도 좋은 성과를 얻고 있는 것으로 알려져 있다[5].

한편 3-차원 메쉬(mesh)의 경우도 2-차원 메쉬에 비해 제작이 복잡한 점은 있으나 보다 짧은 지름(diameter) 및 큰 이분폭(bisection width) 등 성능에 미치는 긍정적 효과와 확장성 등의 장점으로 인해 대규모 병렬처리시스템(massively parallel processing system)으로 비교적 널리 구현되고 있는 실정이다.

† 정 회 원 : 부산외국어대학교 디지털정보공학부 교수  
논문접수 : 2003년 8월 25일, 심사완료 : 2003년 10월 27일

손님(guest) 그래프  $G$ 의 주인(host) 그래프  $H$ 로의 임베딩(embedding)이란  $G$ 의 정점들의 집합  $V(G)$ 로부터  $H$ 의 정점(vertex)들의 집합  $V(H)$ 로의 일대일 대응을 의미하는 함수  $F$ 로 정의된다. 이때  $G$ 의 간선(edge)  $e = (v, w)$ 는  $F(v)$ 와  $F(w)$ 를 연결하는  $H$ 의 경로(path)  $F(e)$ 에 대응된다.

임베딩  $F$ 의 비용을 측정하는 척도로는 신장율(dilation)과 확장율(expansion) 및 혼잡율(congestion)이 주로 사용되고 있다. 임베딩  $F$  하에서  $G$ 의 간선  $e$ 의 신장율은 이에 대응되는  $H$ 에서의 경로  $F(e)$ 의 길이를 의미하고 모든 간선에 대해 적용한 결과 최대값을 그 임베딩  $F$ 의 신장율로 정의하며, 확장율은 두 그래프의 크기의 비로써  $G$ 의 정점들의 개수에 대한  $H$ 의 정점들의 개수의 비로 정의한다. 따라서 신장율이란  $G$ 의 구조를 갖는 알고리즘을  $H$  형태의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서 시뮬레이션할 때 필요한 통신 스텝의 수를 의미하므로 전달지연을 의미한다. 한편 확장율은  $H$  구조의 상호연결망을 갖는 병렬처리시스템에서의 자원의 효율성을 의미한다. 그리고 확장율은 임베딩  $F$ 를 통해 그래프  $G$ 의 정점들이 각각 그래프  $H$ 의 대응되는 정점들로 매핑되는 과정에서  $G$ 의 간선  $e$ 가  $H$ 에서의 경로  $F(e)$ 로 대응됨에 따라 그래프  $H$  내의 각 간선  $e'$ 의 관점에서 볼 때 함수  $F$ 를 통해  $e'$ 를 경유하도록 매핑된 그래프  $G$ 의 대응되는 간선이 다수가 될 수가 있는데 이 때  $H$  내의 각 간선  $e'$ 를 경유하도록 매핑된 그래프  $G$ 의 대응되는 간선의 수를  $e'$ 의 혼잡율이라고 정의하고  $H$  내의 모든 간선들에 대해서 구한 혼잡율의 최대값을 임베딩  $F$ 의 혼잡율이라고 정의한다. 따라서 혼잡율의 불균형이 심한 임베딩의 경우에는 두 개의 서로 다른 상호연결망의 시뮬레이션 과정에서 통신 채널로 작용하게 될 해당 간선에서의 병목(bottleneck)현상으로 인한 통신 성능의 저하요인이 됨을 의미한다. 이러한 성능평가 요소들은 신장율, 확장율 및 혼잡율 모두 그 값이 작을수록 우수한 성능의 임베딩으로 평가된다.

높이가  $N$ 인 피라미드를 메쉬로 임베딩시킨 관련 연구로는 Stout[6]이  $2^N \times 2^N$ 의 2-차원 메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{N-1}$ 와 3인 임베딩 방법을 제안하였으며, Chang[7]은 이를 개선하여 동일한 조건 하에서 신장율을  $(5/8) \cdot 2^{N-1}$ 로 개선한 연구결과를 발표하였다.

3-차원 메쉬로 그 대상을 확장시킨 피라미드의 임베딩 관련 연구로는 Ip[8]와 Chung[9]의 연구 결과들이 알려져 있다. Ip는 자연 임베딩(Natural Embedding)과 다중 임베딩(Multiple Embedding) 기법들을 제안하고 있는데, 높이  $N$ 인 피라미드를 대상으로 전자의 경우는  $N \times 2^{N-1} \times 2^{N-1}$  메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{N-2}+1$ 과  $3N/4$ 로 임베딩 가능함을 보인 것이고, 이를 확장시킨 후자의 경우는  $6 \times 2^{N-2} \times 2^{N-2}$  메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{N-3}$ 과  $9/8$ 인 임베딩 방법을 제안하였다[8].

<표 1> 피라미드의 3-차원 메쉬 임베딩 결과

임베딩 방법	신장율	확장율
자연 임베딩[8]	$2^{N-2}+1$	$3N/4$
다중 임베딩[8]	$2^{N-3}$	$9/8$
Chung 임베딩[9]	$2^{2N-4}/3$	$1+2/4^{N+1}/3$

한편 Chung은 [9]에서 동일한 크기의 피라미드를 대상으로  $\{4^{N+1}/3+2\}/3 \times 2^{2N-1}/3 \times 2^{2N-1}/3$  메쉬로 신장율과 확장율이 각각  $2^{2N-4}/3$ 과  $1+(2/4^{N+1})/3$ 라는 보다 개선된 임베딩 방법을 제안하였다. 이러한 3-차원 메쉬에 대한 관련 연구 결과를 요약하면 <표 1>과 같다.

본 논문에서는 [9]에서 제안하고 있는 임베딩에서의 평가 요소인 신장율의 관점에서 동일한 조건 하에서 보다 개선된  $(2 \cdot 4^{N+1}/3+4)/3$ 의 성능을 갖는 임베딩 기법을 제안한다.

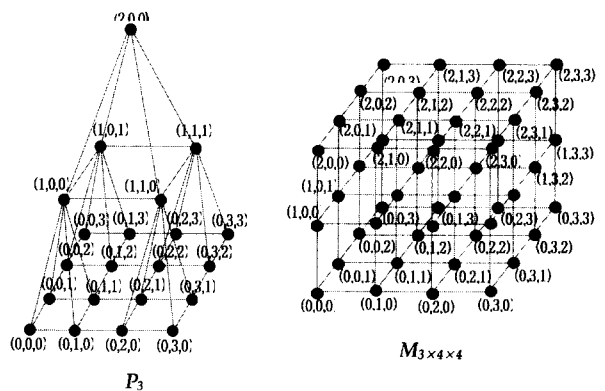
본 논문은 네 개의 절로 구성되며, 제 2절에서는 본 논문에서 주로 다루게 될 두 그래프에 해당하는 피라미드와 3-차원 메쉬에 대한 정의와 특성들에 대해 살펴보고 제 3절에서는 본 논문에서 제안하고 있는 임베딩 기법에서 제안하고 있는 매핑 함수 소개 및 신장율 특성을 분석한 연구 결과를 제시하고, 마지막 제 4절에서 결론을 맺는다.

## 2. 대상 그래프 특성

본 절에서는 본 논문에서의 임베딩 대상이 되는 손님 및 주인 그래프인 피라미드 및 3-차원 메쉬 구조의 정의 및 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

**[정의 1]** 주어진 양의 정수  $N$ 에 대해 높이가  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 은 정점(vertex)의 집합  $V(P_N)$ 과 간선(edge)의 집합  $E(P_N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} V(P_N) &= \bigcup_{0 \leq i \leq N-1} \{(l, x, y) | 0 \leq x, y \leq 2^{N-i} - 1\} \\ \textcircled{2} E(P_N) &= \bigcup_{0 \leq i \leq N-2} \{((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2)) | |x_1 - x_2| \\ &\quad + |y_1 - y_2| = 1 \ \&\& \ (l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2) \in V(P_N)\} \\ &\quad \cup \bigcup_{0 \leq i \leq N-2} \{(l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)\} \\ &\quad | 0 \leq x, y \leq 2^{N-i} - 1 \} \end{aligned}$$



(그림 1) 피라미드 및 3-차원 메쉬 그래프 예

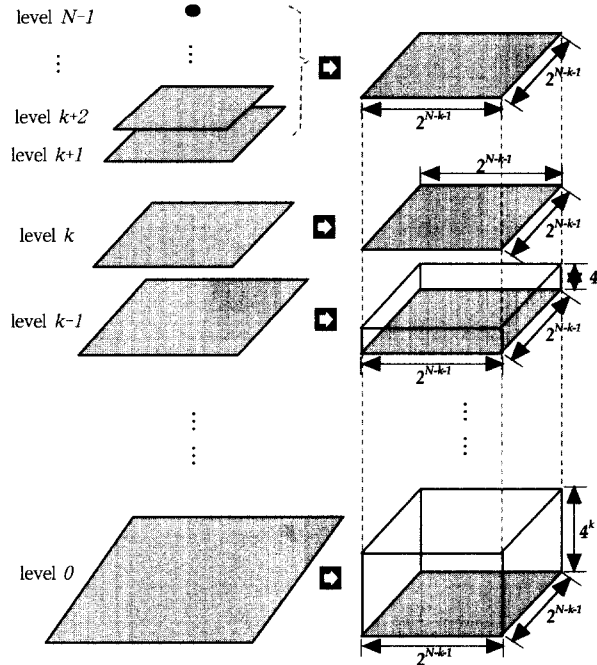
[정의 2] 정방형 2-차원 기저(base) 메쉬의 한 변과 높이를 각각 나타내는 주어진 양의 정수  $W$ 와  $H$ 에 대한 3-차원 메쉬  $M_{H \times W \times W}$ 는 정점의 집합  $V(M_{H \times W \times W})$ 와 간선의 집합  $E(M_{H \times W \times W})$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

- ①  $V(M_{H \times W \times W}) = \bigcup_{0 \leq z \leq H-1} \{(z, x, y) | 0 \leq x, y \leq W-1\}$
- ②  $E(M_{H \times W \times W}) = \{((x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')) | \sum_{i=1 \leq i \leq 3} |x_i - x_i'| = 1 \text{ \&\& } (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') \in V(M_{H \times W \times W})\}$

(그림 1)은 높이(height)가 3인 피라미드와  $3 \times 4 \times 4$ 인 3-차원 메쉬의 예를 보여주고 있다. 일반적으로 높이가  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 의 각 레벨  $l$  ( $0 \leq l < N$ )에는  $4^{N-l}$ 개의 정점들로 구성된 정방형 2-차원 메쉬  $2^{N-l} \times 2^{N-l}$  구조로 이루어져 있어 가장 위 레벨에 해당하는 레벨  $N-1$ 의 1개의 정점으로 구성된 2-차원 메쉬로부터 시작하여 가장 아래 레벨에 해당하는 레벨  $0$ 의  $4^{N-1}$ 개로 구성된 2-차원 메쉬까지 다양한 그래프들을 포함하고 있음을 알 수 있다.

### 3. 임베딩 기법 및 성능 분석

본 절에서는 본 논문에서 제안하고 있는 피라미드의 3-차원 메쉬에 대한 임베딩 기법의 매핑 함수를 소개하고 해당 함수 적용시의 성능을 신장율의 관점에서 분석한다.



(그림 2)  $P_N$ 의 레벨별 z-축 계층(layer) 점유율

#### 3.1 매핑 함수

높이가  $N$ 인 피라미드를 3-차원 메쉬로 임베딩하기 위한

새로운 매핑 함수를 본 논문에서는 다음과 같이 정의한다.

$$F_{new} : V(P_N) \rightarrow V(M_{H \times W \times W})$$

$$F_{new}(l, x, y) = \begin{cases} (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4, \lfloor x/2^{k-l} \rfloor, \lfloor y/2^{k-l} \rfloor), & 0 \leq l \leq k-1 \text{ \&\& } (Y \bmod 2) = 0 \\ ((4^{k-l}-1)/3 - (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4), \lfloor x/2^{k-l} \rfloor, \lfloor y/2^{k-l} \rfloor), & 0 \leq l \leq k-1 \text{ \&\& } (Y \bmod 2) = 1 \\ ((4^{k-l}-4)/6, x, y), l = k \\ ((4^{k-l}+2)/6, S_{lx} + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l, S_{ly} - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l), & k+1 \leq l \leq N-1 \text{ \&\& } l \neq N-2 \\ ((4^{k-l}+2)/6, S_{lx} + x \cdot 2^l + y \cdot 2^l + (-1)^x \cdot D, & \\ S_{ly} - x \cdot 2^l + y \cdot 2^l + (-1)^y \cdot D), l = N-2 \end{cases} \quad (1)$$

여기서,  $Z_1 = \sum_{j=0}^{l-1} (Y \cdot 2^{(l-j)} + 2^{(l-j-1)}) \cdot 2^{(k-j)}$

$Z_2 = Y \cdot 2^{(k-l)} + X$

$Z_3 = \sum_{j=l+1}^{k-1} \{ \lfloor (Y + 2^{(j-l-1)}) / 2^{(j-l)} \rfloor \} \cdot 2^{(k-j)}$

$Z_4 = 2 \cdot \lfloor y / 2^{(k-l-1)} \rfloor$

$X = x \bmod 2^{(k-l)}, Y = y \bmod 2^{(k-l)}$

$S_{lx} = 2^l - 1, S_{ly} = 2^{N-l} - 1,$

$D = \lfloor (3 \cdot 2^{N-l} + 1) / 2 \rfloor$

본 매핑함수에서  $Z_1, Z_3$ 에 해당하는 성분들은 각각 자신보다 하위 및 상위에 소속된 블록들의 정점들이 동일한  $x$ -좌표 및  $y$ -좌표로 할당됨에 따라  $z$ -좌표를 따라 축적되는 성분의 영향을 반영시켜 주기 위한 값을 의미하고,  $Z_2$ 는 동일 레벨의 블록 내 정점들로 인한  $z$ -축 방향의 축적 성분을 반영해 주기 위한 값이다. 그리고  $Z_4$ 의 경우는 레벨  $l=k$  및  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 속한 정점들이 배치될 두 개의 계층(layer)을 보정해 주기 위한 배려이다.

본 매핑 함수에 의하면 레벨이  $N$ 인 피라미드  $P_N$ 에서  $k$  값에 따라  $0 \leq l < k$ 를 만족하는 임의의 레벨  $l$ 에 존재하는  $4^{N-l}$ 개의 정점들로 구성된 정방형 2-차원 메쉬  $2^{N-l} \times 2^{N-l}$ 을 레벨에 관계없이 동일하게  $4^{N-k-l} (= 2^{N-k-l} \times 2^{N-k-l})$ 개의 블록들로 나누기 위해 (그림 2)에서 보는 바와 같이  $x$ -축 및  $y$ -축 방향으로 균일하게  $2^{k-l}$ 개씩 할당함으로써 각 블록은  $4^{k-l} (= 2^{k-l} \times 2^{k-l})$ 개의 정점들로 구성되고 이에 해당하는  $z$ -축 방향의 성분으로 점유하게 된다.

따라서 손님 그래프  $P_N$  내에서 나누어진 하나의 블록에 속한 정점들을 주인 그래프로 임베딩시킬 때 동일한  $x$ -좌표 및  $y$ -좌표를 갖도록  $z$ -축 방향으로 차례대로 축적해 나가는 형식을 취한다. 이 과정에서 블록  $[ij], 0 \leq i, j \leq 2^{N-k-l} - 1$ 에 속하는  $4^{k-l}$ 개 정점들 중 원래 그래프  $P_N$ 에서  $x$ -축 방향으로 인접된  $2^{k-l}$ 개 정점들을 하나의 부-블록(sub-block)이라고 정의하면((그림 5) 참조), 레벨  $l$  내의 각 블록들은 내부로  $x$ -축우선 순위(x-direction-major order)

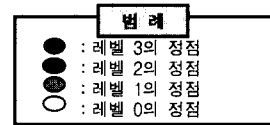
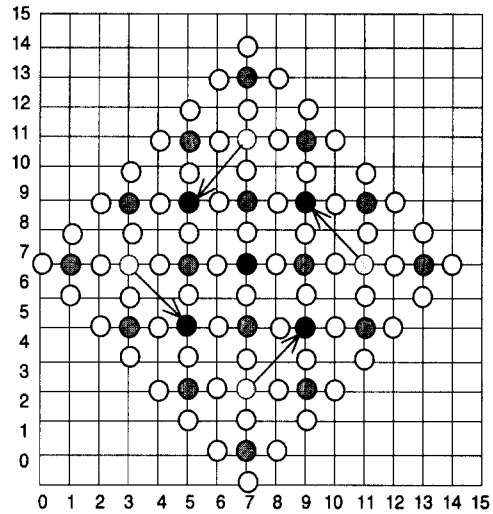
방식으로 구분된  $2^{k-1}$ 개의 부-블록들로 나누게 되고 각 부-블록들은 다시 내부에 각각  $2^{k-1}$ 개씩의 정점들이 포함되어 있다.

인접된 부-블록 상호간의 연결 간선에서의 신장율을 줄이기 위해  $F_{new}$ 에서는  $P_N$ 에서의 주어진  $y$  좌표 값으로부터  $Y$  값을 계산하여  $Y$ 가 짝수인 경우에는 (그림 3)에서 보는 바와 같이 상향(上向)으로, 홀수인 경우에는 그 역방향에 해당하는 하향(下向)으로 순서대로 쌓아 나가도록 하기 위해 매핑함수 식 (1)에서 보는 바와 같이  $0 \leq l \leq k-1$ 에 해당하는 레벨  $l$ 에 대해 두 개의 서로 다른 식을 정의하고 있다.

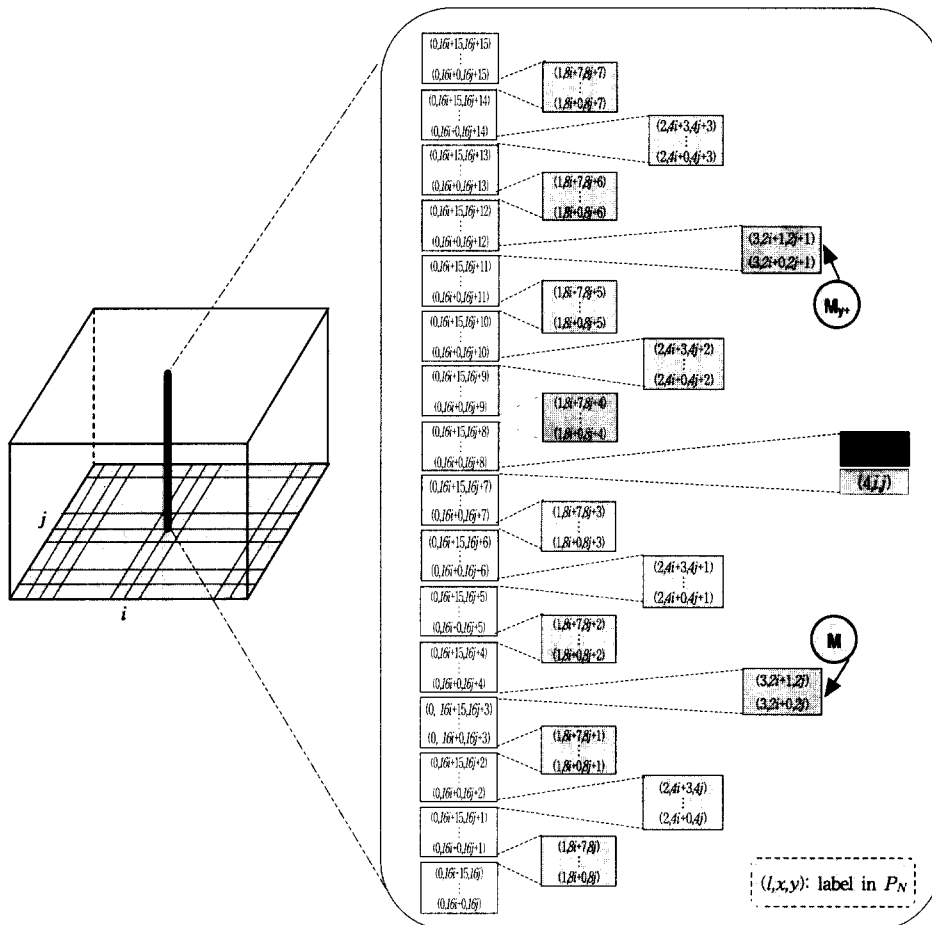
한편,  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 해당하는 레벨의 정점들에 대해서는 [7]에서 제안하고 있는 정방형(regular) 2-차원 메쉬로의 임베딩 기법의 매핑 함수를 적용하게 되며, 임베딩의 적용 예를 (그림 4)에서 보여주고 있다.

3.2 성능 분석

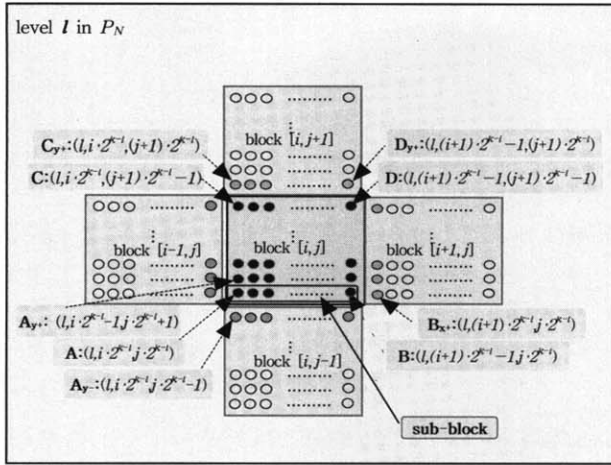
주어진 피라미드  $P_N$ 의 3-차원 메쉬에 대한 임베딩 함수  $F_{new}$  적용에 따라 수반되는 성능 파라미터 요소 중 통신 성능에 영향을 미치게 될 신장율의 관점에서 본 임베딩의 성능을 구체적으로 분석하고자 한다.



(그림 4)  $P_N$ 의 레벨  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 속한 정점들에 대한 매핑함수 적용 예



(그림 3) 3-차원 메쉬 내부의  $x = i, y = j$  (좌측  $j$ )에 해당하는  $z$ -축 내부 축적도( $k=4$ 인 경우)



(그림 5)  $P_N$ 의 레벨  $l$  내 블록  $[i, j]$  내부 및 경계 부분 구성

**[보조정리 1]**  $P_N$  내의  $0 \leq l < k-1$ ,  $i \cdot 2^{k-l} \leq x \leq (i+1) \cdot 2^{k-l}-1$ ,  $j \cdot 2^{k-l} \leq y \leq (j+1) \cdot 2^{k-l}-1$ 을 만족하는 레벨  $l$  내의 블록  $[i, j]$  및 그 경계에 해당하는  $y$ -축 방향으로 인접된 임의의 두 정점  $(l, x, y)$ 와  $(l, x, y+1)$ 를 연결하는 간선들의 최대 신장율은  $2^k$ 이다.

**[증명]** 매핑 함수  $F_{new}$ 에 의하면 블록  $[i, j]$ 에 속한 모든 정점들은 주인 그래프인 3-차원 메쉬에 임베딩되는 경우 동일한  $x$ - 및  $y$ -좌표값을 갖게 되므로, 결국  $z$ -축 상으로만 초점을 맞추어 원래 손님 그래프인  $P_N$  상에서  $y$ -축 방향으로 서로 인접되었던 정점들에 대해 임베딩 후 주인 그래프인 3-차원 메쉬 상에서  $z$ -좌표 상에서 얼마나 멀리 떨어져 지게 배치되는지를 분석하면 된다. 한편 매핑 함수  $F_{new}$ 에 의하면 블록  $[i, j]$ 에서  $j$  값이 짝수이면 상향(up)으로 홀수이면 하향(down)으로 축적해 가는 방식을 취하고 있으므로 따라서 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 고려한다.  $j$  값이 짝수 또는 홀수 여부에 따라서 축적 형태만 반대로 될 뿐 신장율의 계산에 필요한 상대적 위치의 차이는 동일하므로 여기서는  $j$  값이 짝수라고 가정한다.

① 동일 블록 내에서  $y$ -좌표 값이 인접된 두 정점의 경우[(그림 5)에서 A와  $A_{y+}$ ]: 이 경우는 인접된 부-블록에 위치한 두 정점을 의미하므로 (그림 3) 및 식 (1)의  $Z_2$  성분을 통해 알 수 있는 바와 같이 레벨  $l$  소속 정점들에 의해  $2^{k-l}$ 에 해당하는 상대적 위치 차이가 발생됨을 알 수 있다. 아울러 인접된 부-블록들 사이에는 자신보다 상위 및 하위 레벨들에 속하는 부-블록이 위치할 수 있게 되는데 해당 성분으로 인한 상대적 위치 증가분은 매핑 함수의 식 (1)에서 정의된 바와 같이  $Z_1, Z_2, Z_3$  및  $Z_4$  성분들의 합에 해당함을 알 수 있다.

여기서  $Z_3$ 의 경우는 인접된 부-블록 사이에 삽입될 수 있는 상위 레벨 부-블록들이 중복해서 들어갈 수 없다는 사실과 레벨 값이 작을수록 해당 성분의 영향이 커진다는

사실로부터 레벨  $l=0$ 일 경우에 인접된 두 부-블록 사이에 레벨  $l$ 에 해당하는 부-블록이 삽입되는 경우에 최대값  $2^{k-l}$ 이 된다는 것을 알 수 있다.

반면에  $Z_1$ 의 경우는 레벨 값이 클수록 해당 성분의 영향이 커진다는 사실로부터 레벨  $l=k-1$ 일 경우에 인접된 두 부-블록 사이에 삽입될 수 있는 레벨별 부-블록들의 소속 정점들의 합에 해당하는 값을 구해야 하는데,  $Z_1$  값은  $Y$ 값에만 의존적이라는 사실과  $Y = y \bmod 2^{k-l}$ 이라고 할 때,  $y \bmod 2^{k-l} = Y+I$ 라는 사실을 알 수 있다. 따라서  $P_N$ 의 두 정점  $A = (l, x, y)$ 와  $A' = (l, x, y+1)$ 가 3-차원 메쉬로 매핑되었을 때의  $z$ -좌표에 영향을 주게 되는  $Z_1$  성분의 값을 각각  $Z_1(A)$ 와  $Z_1(A')$ 라고 할 때, 이들 값의 차이를 구해보면 신장율을 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_1(A') - Z_1(A) &= \sum_{j=0}^{l-1} ((Y+I) \cdot 2^{(l-j)} + 2^{(l-j-1)}) \cdot 2^{(k-j)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{l-1} (Y \cdot 2^{(l-j)} + 2^{(l-j-1)}) \cdot 2^{(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} 2^{(l-j)} \cdot 2^{(k-j)} = \sum_{j=0}^{l-1} 2^{(k+l-2j)} \end{aligned}$$

따라서 이 경우에 대한  $Z_1$  성분의 최대값은  $l=k-1$ 일 경우에  $(2^{2k+1}-8)/3$ 이 된다.

그리고 이 경우에  $Z_3 = 0$ 가 되고,  $Z_2$ 의 경우는 동일 레벨 내의 부-블록의 크기에 해당하므로  $2^{k-l}$ 이 되고,  $Z_4$ 의 경우는 중앙에 위치하게 될 레벨  $l = k$  및  $k+1 \leq l \leq N-1$ 에 해당하는  $z = (4^{k+1}-4)/6$ 와  $z = (4^{k+1}+2)/6$  계층을 가로지르게 될  $\lfloor y/2^{k-l} \rfloor = 1$ 이 되는 최악의 경우(그림 3)에서  $M$  및  $M_y$ , 참조)를 고려할 때 최대값으로 2가 됨을 알 수 있다.

따라서 각 성분들을 합한 신장율의 최대값은  $(2^{2k+1}+4)/3$ 가 된다.

② 블록간의 경계선상에서  $y$  좌표값이 인접된 두 정점의 경우[(그림 5)에서 C와  $C_{y+}$ ]: (그림 5)에서 알 수 있는 바와 같이 정점  $C_{y+}$ 는 블록  $[i, j+1]$ 의 첫 번째 정점에 해당하고  $j$  값이 홀수가 되므로 하향으로 축적되는 경우에 해당하므로 3-차원 메쉬로 임베딩되는 과정에서 최대  $z$ -좌표 값에 해당하는  $((4^{k-l}-1)/3, i, j+1)$ 로 매핑됨을 알 수 있다. 그리고 (그림 5)에서 정점 C의 경우는 블록  $[i, j]$ 의 마지막 부-블록 내에서 첫 번째 정점에 해당하고  $j$  값이 짝수이므로 상향으로 정렬되는 블록에 해당하므로 최대  $z$ -좌표 값에 해당하는  $((4^{k-l}-1)/3)$ 로부터  $2^{k-l}-1$ 만큼 아래에 위치한  $((4^{k-l}-1)/3 - 2^{k-l}-1, i, j)$ 에 해당하는 3-차원 메쉬의 정점으로 매핑됨을 알 수 있다. 따라서 이 두 정점간의 상대적 위치는  $y$ -좌표 및  $z$ -좌표 방향을 따라 각각  $l$ 과  $2^{k-l}-1$ 이므로 결국  $2^{k-l}$ 만큼의 신장율 증가 요인이 발생되고 레벨  $l=0$ 일 경우에 최대값  $2^k$ 가 됨을 알 수 있다.

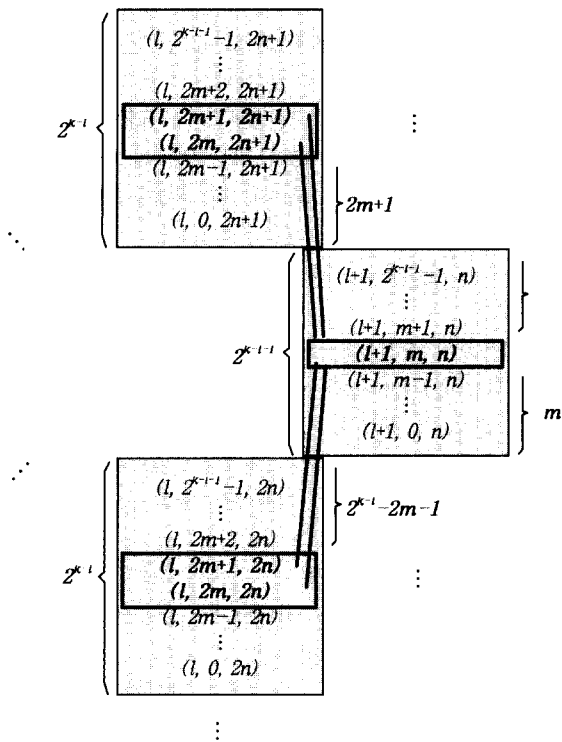
따라서 위의 ①과 ②의 결과를 종합해 보면 ①의 크기가

②를 압도하게 되므로 결국  $y$ -방향 간선들에 대해서  $0 \leq l \leq k-1$ 에 해당하는 레벨  $l$ 을 통틀어 최대값은  $l=k-1$ 인 경우에 해당하는  $(2 \cdot 2^{k-1} + 4)/3$ 가 됨을 알 수 있다. □

**[보조정리 2]**  $P_N$  내의  $0 \leq l < k-1$ ,  $i \cdot 2^{k-l} \leq x \leq (i+1) \cdot 2^{k-l} - 1$ ,  $j \cdot 2^{k-l} \leq y \leq (j+1) \cdot 2^{k-l} - 1$ 을 만족하는 레벨  $l$  내의 블록  $[i, j]$  및 그 경계에 해당하는  $x$ -축 방향으로 인접된 임의의 두 정점  $(l, x, y)$ 와  $(l, x+1, y)$ 를 연결하는 간선들의  $F_{new}$  하에서의 최대 신장율은  $2^k$ 이다.

**[증명]** (보조정리 1)에서와 유사하게 매핑 함수  $F_{new}$ 에 의해  $z$ -좌표상에 축적되는 정점들의 레벨별 분포를 분석하기 위해 두 가지 경우로 나누어 고려한다.  $x$ -방향으로 인접된 정점들에 대해서는 모두 동일한  $j$  값을 갖게 됨에 따라  $j$  값이 짝수 또는 홀수에 따라서 동일한 형태로 축적되므로 별도로 신경 쓸 필요가 없다. 여기서는 편의상  $j$  값은 짝수라고 가정한다.

① 동일 블록 내에서  $x$ -좌표 값이 인접된 두 정점의 경우: 이 경우는 하나의 부-블록 내에 위치한 두 정점을 의미하므로 손님 그래프인 피라미드에서의 인접성(adjacency)은 주인 그래프인 3-차원 메쉬로 임베딩된 후에도 그대로 유지되므로 해당 간선에서의 신장율은 1이다.



(그림 6) 3-차원 메쉬로의 매핑 후 인접 레벨간 간선 연결도

② 블록간의 경계선상에서  $x$ -좌표값이 인접된 두 정점의 경우[(그림 5)에서 B와 B<sub>x</sub>]: (그림 5)에서 알 수 있는 바와 같이 정점 B<sub>x</sub>는 레벨  $l$ 의 블록  $[i+1, j]$ 의 첫 번째 정점에

해당하므로 3-차원 메쉬로 임베딩되는 과정에서 레벨  $l$ 의 정점들 중 최저의  $z$ -좌표값을 갖는 반면에, 정점 B의 경우는 블록  $[i, j]$ 의 첫 번째 부-블록 내에서 마지막 정점에 해당하고 이들 사이에 해당하는  $z$ -좌표 상에는 다른 레벨의 정점들이 삽입될 수 없으므로 결국 이들 두 정점 사이의 상대적 위치는 3-차원 메쉬 상에서  $z$ -좌표 및  $x$ -좌표 방향을 따라 각각  $2^{k-l}-1$ 과 1이므로 결국  $2^{k-l}$  만큼의 신장을 증가 요인이 발생되고 레벨  $l=0$ 일 경우에 최대값  $2^k$ 가 됨을 알 수 있다.

최종적으로 위의 모든 경우에 대한 계산 결과를 종합하면 이 경우에 대한 신장율은 최대값에 해당하는  $2^k$ 이다. □

**[보조정리 3]**  $P_N$  내의  $0 \leq l < k-1$ ,  $i \cdot 2^{k-l} \leq x \leq (i+1) \cdot 2^{k-l} - 1$ ,  $j \cdot 2^{k-l} \leq y \leq (j+1) \cdot 2^{k-l} - 1$ 을 만족하는 인접된 두 레벨  $l$  및  $l+1$  내의 블록  $[i, j]$ 에 속하는 임의의 두 정점  $(l, x, y)$ 와  $(l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)$ 를 연결하는 간선들의  $F_{new}$  하에서의 최대 신장율은  $(2^k+2)/3$ 이다.

**[증명]**  $\lfloor x/2 \rfloor = m$ ,  $\lfloor y/2 \rfloor = n$ 이라 두고,  $P_N$  내의 레벨  $l+1$ 의 정점  $P=(l+1, m, n)$ 을 기준으로 하위 레벨인 레벨  $l$ 의 연결 정점들과의 상대적인 배치 내역을 분석하여 신장율을 분석하고자 한다. 기준 정점  $P$ 는 레벨  $l+1$  내의 블록  $[i, j]$ 의  $n$ -번째 블록에 해당하고,  $n$ -번째 블록 내에서  $m$ -번째 정점에 해당함을 의미하고 있다. 임의의 레벨  $h(0 \leq h \leq N-1)$ 에 속한 정점들로 인한 신장율 성분을  $Dil_h$ 라고 할 때 임베딩  $F_{new}$  하에서의 레벨간 연결 간선들의 신장율을  $D$ 라고 할 때  $D$ 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$D = \sum_{h=0}^{N-1} Dil_h$$

(그림 6)에서 확인할 수 있는 바와 같이 레벨  $l+1$ 의 정점  $P$ 와 연결된 하위의 레벨  $l$ 에 속하는 정점들은 모두 4개로 3-차원 메쉬로의 매핑과정에서 모두  $x$ -좌표 및  $y$ -좌표값은 모두 동일하고  $z$ -좌표의 경우는  $P$ 보다 위 및 아래 위치에 해당하는 부분으로 각각 2개씩이 할당되는 형식을 취하고 있다. 따라서  $P$ 보다 위 및 아래 부분에 위치하고 있는 레벨  $h(0 \leq h \leq N-1)$ 에 속한 정점들로 인한 신장율 성분을 각각  $Dil_h^{UP}$ 과  $Dil_h^{DN}$ 이라고 하면 레벨별로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 고려한다.

① 레벨  $l$ 과  $l+1$ 에서의 신장율 성분: (그림 6)을 참조하여 다음과 같은 식으로 유도할 수 있다.

$$Dil_l^{UP} = 2m+1, \quad Dil_{(l+1)}^{UP} = 2^{k-l} - m - 1$$

$$Dil_l^{DN} = 2^{k-l} - 2m - 1, \quad Dil_{(l+1)}^{DN} = m$$

따라서 이 경우의 신장율은 다음과 같이 최대값을 구하여 계산할 수 있다.

$$Dil_l + Dil_{(l+1)} = \max_{0 \leq m < 2^{k-l}} \{Dil_l^{UP} + Dil_{(l+1)}^{UP},$$

$$\begin{aligned}
 & Dil_l^{DN} + Dil_{(l+1)}^{DN} \\
 = & \max_{0 \leq m < 2^{k-l-1}} \{2^{k-l-1} + m, 2^{k-l} - m - 1\} \\
 = & 2^{k-l} - 1
 \end{aligned}$$

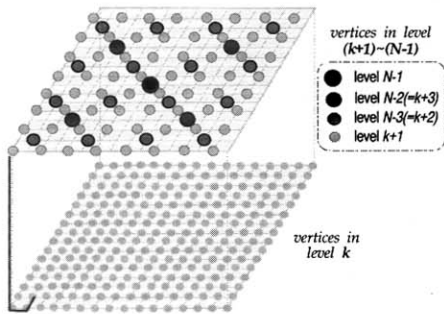
따라서 각 레벨에 걸쳐 최대값으로는  $l=0$ 인 경우에 신장율의 최대값 성분으로  $2^k - 1$ 을 얻게 되고  $l=k-1$ 인 경우에는 최소값에 해당하는 1의 값을 얻는다.

②  $0 \leq j \leq l-1$ 에 해당하는 레벨  $j$ 에 속한 정점들로 인한 신장율 성분 : (그림 3)을 참조하여 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{l-1} Dil_j^{UP} &= \sum_{j=0}^{l-1} Dil_j^{DN} \\
 &= \sum_{j=0}^{l-1} 2^{(k-j)} \cdot 2^{(l-1-j)} = \sum_{j=0}^{l-1} 2^{(k+l-2j-1)} \\
 &= (2^{(k+l+1)} - 2^{(k-l+1)})/3
 \end{aligned}$$

따라서 각 레벨에 걸쳐 최대값으로는  $l=k-1$ 인 경우에 신장율의 최대값 성분으로  $(4^k - 4)/3$ 를 얻는다.

③  $l+2 \leq j \leq N-1$ 에 해당하는 레벨  $j$ 에 속한 정점들로 인한 신장율 성분 : 이 경우는  $l=k-1$ 인 경우에 레벨  $j$ 에 해당하는 정점들이 집중적으로 배치된  $z=(4^{k+1}+2)/6$  계층을 가로지르게 될 경우에 한해 레벨  $l$ 과  $l+1$ 을 연결하는 간선들에 한해 ①에서의  $Dil_l^{UP}$  성분에 +1 만큼의 신장율 증가 요인이 발생된다.



(그림 7) 두 인접 레벨  $k$  및  $k+1$ 간 연결 간선에 대한 임베딩 예

결국 위의 세 가지 경우를 종합하면 레벨간 연결 간선들에 대한 신장율의 최대값은  $l=k-1$ 인 경우로  $(4^k - 4)/3 + 2$ 임을 알 수 있다. □

[보조정리 4]  $P_N$  내의  $0 \leq x, y \leq 2^{N-k-1} - 1$ 을 만족하는 인접

된 두 레벨  $k$  및  $k+1$  간 임의의 두 정점  $(k, x, y)$ 와  $(k+1, [x/2], [y/2])$ 를 연결하는 간선들의  $F_{new}$  하에서의 최대 신장율은 3 이다.

[증명] (그림 7)에서 확인할 수 있는 바와 같이 레벨  $k$  및  $k+1$  간 연결 간선에 대해서는  $z$ -축,  $x$ -축 및  $y$ -축 방향으로 각각 최대 1만큼씩의 차이뿐이므로 결국 해당 간선들에서의 최대 신장율은 3이 된다. □

위의 보조정리들을 종합하면 결국 주어진 매핑함수  $F_{new}$  하에서 손님 그래프인 피라미드의 각 레벨별 간선들의 신장율을 <표 2>와 같이 정리할 수 있는데, 최종적으로 임베딩  $F_{new}$  하에서의 신장율은 최대값에 해당하는  $\max\{(2 \cdot 4^k + 4)/3, 5 \cdot 2^{N-k-2}/8\}$ 로 구할 수 있다. [9]에서의 임베딩 결과와의 성능 비교를 위해 최소 신장율을 위한 조건인  $k=(N-2)/3$ 를 적용시키면 [정리 1]과 같이 요약할 수 있다.

[정리 1]  $N \geq 5$ 를 만족하는 높이가  $N$ 인 주어진 피라미드  $P_N$ 의 3-차원 메쉬에 대한 새로운 매핑함수  $F_{new}$ 에 의해 정의된 임베딩의 신장율은  $(2 \cdot 4^{(N-2)/3} + 4)/3$ 이다.

[증명]  $N \geq 2$ 를 만족하는 임의의  $N$ 에 대해  $\max\{(2 \cdot 4^k + 4)/3, 5 \cdot 2^{N-k-2}/8\} = (2 \cdot 4^k + 4)/3$ 이므로 정리는 성립한다. □

위의 정리는 결국 신장율 관점에서 본 임베딩의 성능이 [9]에서의  $4^{(N-2)/3}$ 보다 동일한 조건 하에서 약 1/3 정도 감소한  $(2 \cdot 4^{(N-2)/3} + 4)/3$ 로 개선되었음을 의미한다.

### 4. 결 론

본 논문에서는 다중 병렬처리시스템에서의 영상처리 및 그래프 문제 해결에 다양하게 응용됨에 따라 많은 관심을 받고 있는 상호연결망 그래프 중의 하나인 피라미드를 대상으로 3-차원 메쉬로의 임베딩을 위한 새로운 기법을 제안하고 해당 매핑 함수 적용시 신장율 관점에서의 성능을 분석하였다.

분석 결과 새로운 임베딩  $F_{new}$  하에서의 신장율은  $(2 \cdot 4^{(N-2)/3} + 4)/3$ 으로써 기존의 방법에서 제안한 동일한 조건 하에서의 신장율보다 약 1/3 정도의 개선이 되었음을 확인할 수 있었다.

따라서 대규모 병렬처리시스템에서 프로세서 상호간 통신 스텝의 수와 관련하여 중요한 의미를 갖는 신장율의 관

<표 2>  $P_N$ 의 레벨별 신장율

구 분	$P_N$ 의 간선별 신장율			최대값	비 고
	$l$ -방향	$x$ -방향	$y$ -방향		
$P_N$ 의 레벨	$0 \leq l \leq k-1$	$(4^k - 4)/3$	$2^k$	$(2 \cdot 4^k + 4)/3$	$(2 \cdot 4^k + 4)/3$
	$l=k$	3	1	1	3
	$k+1 \leq l \leq N-1$	$5 \cdot 2^{N-k-2}/8$		$5 \cdot 2^{N-k-2}/8$	$5 \cdot 2^{N-k-2}/8$

점에서 임베딩의 성능을 분석함으로써 해당 기법의 적용시 예상되는 통신 성능을 예측해보는데 그 의의가 있다.

3-차원 메쉬 모델의 대규모 병렬처리시스템 환경 하에서 저-레벨의 그래픽 데이터 처리 등 관련 분야에서 피라미드 기반의 내재된 자료구조 형식의 알고리즘들이 많은 이용되고 있는 점을 고려할 때 본 연구결과는 멀티미디어 및 그래프 관련 알고리즘들의 시뮬레이션이나 자원 할당 등의 응용분야에서 기반기술로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

### 참 고 문 헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," J. of Parallel and Distrib. Comput., Vol.4, pp.439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," Computing Supplement, Vol.7, pp.257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," IEEE Trans. on Comput., Vol.37, pp.867-872, 1988.
- [4] F. T. Leighton, "Introduction to Parallel Algorithms and Architectures : Arrays, Trees, Hypercubes," Morgan Kaufmann Pub., CA., 1992.
- [5] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," SIAM J. on Comput., Vol.16, No.1, pp.38-60, 1987.
- [6] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," Proc. of the IEEE, pp.982-995, 1988.
- [7] 장정환, "피라미드의 정방형 2-차원 메쉬로의 새로운 임베딩," 한국해양정보통신학회논문집, 제6권 제2호, pp.257-263, 2002.
- [8] D. M. C. Ip, C. K. Y. Ng, L. K. L. Pun, M. Hamdi and I. Ahmad, "Embedding Pyramids into 3D Meshes," Proc. of 1993 Int'l Conf. on Paral. and Distrib. Sys., pp.348-352, 1993.
- [9] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," Nordic J. of Computing, Vol.2, No.3, pp. 326-337, 1995.



### 장 정 환

e-mail : jhchang@pufs.ac.kr

1983년 경북대학교 전자공학과(공학사)

1985년 한국과학기술원 전산학과(공학석사)

1998년 한국과학기술원 전산학과(공학박사)

1985년~2000년 한국전기통신공사(KT)

통신망관리센터 선임연구원

2000년~현재 부산외국어대학교 디지털정보공학부 조교수

관심분야 : 병렬처리, 멀티미디어 통신시스템 및 임베디드 시스템 응용, 그래프이론 응용 등