

시뮬레이티드 어닐링에서의 비용오류 측정 및 분석

홍 철 의[†] · 김 영 준[†]

요 약

본 논문은 시뮬레이티드 어닐링에 비동기 병렬화를 적용할 때 발생하는 낙관적 및 비관적 상태변화와 이에 따른 비용오류를 확률적으로 분류하여 새로운 비용오류 측정법을 제안한다. 새로운 비용오류 측정법은 기존의 비용오류 측정법이 가지고 있는 단점을 해결하여 각 온도에서 정확한 비용오류를 계산하며 발생한 비용오류는 시뮬레이티드 어닐링 자체의 hill-climbing 성질에 의하여 보상되어 최적해 접근 특성이 유지된다. 또한 본 논문은 비용오류 발생에 따른 여러 가지 현상을 새로운 측정법에 기만하여 수학적으로 분석 규명한다 따라서 제안된 비용오류 측정법은 비용오류 발생 구조 및 이에 대한 해결책을 제시한다

The Measurement and Analysis of Cost Error in Simulated Annealing

Chul-Eui Hong[†] · Yeong-Joon Kim[†]

ABSTRACT

This paper proposes new cost error measurement method and analyzes the optimistic and pessimistic cost errors statistically which is resulted from an asynchronous parallel Simulated annealing (SA) in distributed memory multicomputers. The traditional cost error measurement scheme has inherent problems which are corrected in the new method. At each temperature the new method predicts the amount of cost error that an algorithm will tolerate and still converge by the hill-climbing nature of SA. This method also explains three interesting phenomena of the cost error analytically. So the new cost error measurement method provides a single mechanism for the occurrence of cost error and its control.

1. 서 론

시뮬레이티드 어닐링(Simulated Annealing, SA)은 급속 옹고시의 어닐링 프로세스를 조합 최적화 문제에 적용한 알고리즘으로 순환상기법에서와 같은 다른 최적화 기법에서 발생하는 지역 최적해를 탈피하지 못하는 문제를 해결하여 전역 또는 근사 최적해에 도달하게 한다. 그러나 시뮬레이티드 어닐링은 Markov 프로세스로 최적해에 도달하는데 수행 시간이 오래 걸린다. 이를 해

결하기 위하여 시뮬레이티드 어닐링 과정의 병렬화 및 어닐링 프로세스 중 가장 시간이 오래 걸리는 비용함수의 근사 계산은 시간 단축을 위해서 그 동안 많은 연구가 진행되어 왔다[1].

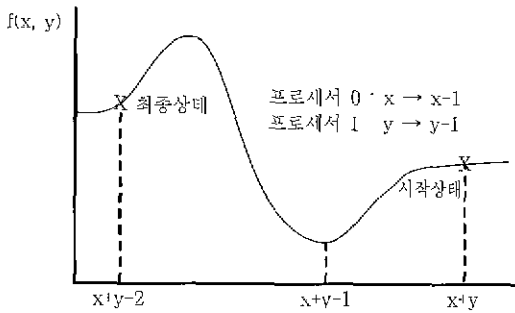
분산 메모리 다중 컴퓨터는 지역 메모리를 가지고 있는 여러 개의 프로세서로 구성되어 있으며 통신을 통하여 서로의 상태를 전달한다. 따라서, 전역 시스템 상태를 유지하는 공유 메모리가 존재하지 않으므로 각 프로세서 사이에 상태 불일치가 발생하며 이로 인하여 비용오류가 발생하게 된다.

(그림 1)은 두 상태변수 x, y 에 대한 비용함수 $f(x, y)$ 를 보여준다. 프로세서 0는 변수 x 의 값을 1 감소시

※ 본 연구는 정보통신부의 대학기초연구지원 사업에 의하여 수행되었음

† 경희원 심명대학교 정보통신학부 교수
논문집수 · 1999년 9월 1일, 심사완료 · 2000년 3월 14일

키고 동시에 프로세서 1은 변수 y 를 1 감소시키어 비용이 낮은 상태로의 변화를 시도한다. 그러나 최종 상태는 오히려 비용이 더 높은 상태로 변화하게 된다. 따라서 두 프로세서 사이에 비동기적으로 발생하는 비용오류가 최적해로의 접근을 방해하게 된다.



(그림 1) 비용오류 발생 구조

시뮬레이티드 어닐링 알고리즘은 비용이 큰 상태로의 변환, 즉 *hill-climb* 상태변환을 허용하므로 어느 정도의 비용오류는 감내한다. 따라서, 분산메모리 다중컴퓨터를 이용한 병렬 알고리즘에서는 각 프로세서의 상태변화에 대한 전역 갱신 빈도를 줄여 다른 프로세서의 오래된 정보를 이용하여 수행 시간을 줄이려 이러한 알고리즘을 비동기 병렬화라 부른다. 반면에, 순차 어닐링에서와 같은 정확한 비용 계산을 이용하는 알고리즘을 동기 병렬화라 정의한다. 어떤 적절한 조건 아래서 어닐링 알고리즘은 부정확한 상태 정보를 사용하여 비용을 계산하여도 최적해에 접근할 수 있으므로, 어닐링 알고리즘의 수행 시간을 단축하기 위해서는 어떤 특정 온도에서 허용 가능한 비용오류의 최대 한계를 구하는 작업이 중요하다.

이전의 비용오류 측정 및 조정 방법은 비용오류를 정확하게 계산하지 못하였을 뿐 아니라 비용오류도 경험적으로 감내되었다. 본 논문에서 제안한 방법은 비동기 병렬 알고리즘에서 발생하는 비용오류를 분석적으로 측정하며, 허용 가능한 비용오류의 최대 한계를 온도와 전역 갱신 빈도의 함수인 *hill-climb* 능력(power or depth)으로부터 계산하여 전역 갱신 빈도를 동적으로 조절함으로써 최적해의 접근 특성을 보장한다.

제 2절에서는 이전의 비용오류 측정 및 감내 기법을 간단하게 요약한다. 제 3절에서는 개선된 비용오류 측정법을 설명하고, 제 4절에서 비용오류 발생 시 존재

하는 3가지의 흥미로운 현상을 개선된 비용오류 측정법에 기초하여 분석한다.

2. 비용오류 감내에 대한 기존 연구

시뮬레이티드 어닐링의 비동기 병렬화에서 각각의 프로세서는 전역 상태의 일정 부분에 대하여 상태변환을 수행한 후 자신의 상태에 대한 정보를 다른 프로세서와 전역 갱신 빈도에 따라 주기적으로 교환한다. 병렬 알고리즘에서 현재 사용되는 비용오류 측정 기법[2]을 본 논문에서 제안된 기법과 구별하기 위하여 기존(traditional) 기법이라 부르기로 한다.

정의 1 : 기존의 비용오류(ΔE_n)는 실제 비용변화와 계산된 또는 측정된 비용변화의 차이로서 정의된다. 즉, 오래된 정보의 사용으로 인하여 실제 비용변화는 계산된 비용변화와 다를 수 있다.

$$\Delta E_n = \Delta C_n - \Delta C_e = (C_{af} - C_{ai}) - \sum_{i=1}^N \Delta C_i$$

여기서 ΔC_n 는 실제(actual) 비용변화, ΔC_e 는 계산된(estimated) 비용변화를 나타낸다. C_{af} 는 실제 최종(actual final) 비용을, C_{ai} 는 실제 초기(actual initial) 비용을 나타낸다. 또한, ΔC_i 는 각 프로세서 i 에서의 계산된 비용변화를 나타내며 N 은 전체 프로세서의 개수를 표시한다. 기존의 비용 오류 측정 기법에는 몇 가지 단점이 있는데 이는 제4절에서 논의된다.

비동기 병렬 알고리즘에서 스트림 길이(stream length)는 모든 지역 상태 정보가 전달되어 갱신되는 전역 갱신 사이에 발생하는 비동기적이며 연속적 상태 변환의 수로 정의된다. [2]에서는 모든 온도 범위에서 스트림 길이를 고정하였으며, 최적의 스트림 길이를 경험적으로 구하였다. 다음은 기존의 방법으로 측정된 비용오류에 대한 감내 방법을 보여준다.

통계 역학에 근거하여 주어진 온도보다 훨씬 작은 비용오류는 감내되어 최적해 접근 특성이 유지됨을 보인다[3] 통계 역학에서는 어떤 물질의 거시적 특성은 모든 가능한 상태에 대한 Boltzmann 인자의 합으로 정의되는 분할 함수, $z = \sum_i e^{-\frac{E_i}{T}}$,에 의하여 구해진다.

이러한 방법을 사용하여 주어진 온도에서의 최대 스트림 길이는 예상되는 비용오류의 크기에 근거하여 확률적으로 예측된다.

[4]에서는 상태변환에 대한 수락율에 기초하여 스트림 길이를 동적으로 변화시킴으로서 평균 비용오류는 일정한 범위에 존재하게 하였다. 비용오류에 대한 수락율을 정규분포의 5% 이내로 고정되어 진다. 양의 오류의 한계 B_+ 와 음의 오류 한계 B_- 는 다음과 같이 근사적으로 구해진다.

$$B_+ \leq -T \cdot \ln(1-0.05) \approx T/20$$

$$B_- \leq -T \cdot \ln(1+0.05) \approx T/21$$

주어진 스트림 길이의 비동기적 상태변환 후에 평균 비용오류가 $T/21$ 보다 크면 스트림 길이는 비용오류에 대한 초과분을 보상하기 위하여 반으로 감소된다. 평균 비용오류가 $T/42$ 보다 작으면 스트림 길이는 서서히 증가된다 수락율 5%는 접근 특성을 유지하기 위하여 경험적으로 정하여 졌다.

3. 개선된 비용오류 감내 기법

본 장에서는 새로운 비용오류 측정 기법을 제안한다. 비용오류에 대한 최대 한계가 전역 갱신 빈도 즉, 스트림 길이 s 의 함수로서 정의된 후 측정된 비용오류의 크기를 이용하여 시뮬레이티드 어닐링의 hill-climb 특성에 기초하여 최적의 스트림 길이가 구해진다.

계산된 비용변화와 실제의 비용변화가 다르므로 상태변환에 오류가 발생한다 두 개의 가능한 상태변환을 ΔC_1 과 ΔC_2 이고 $\Delta C_1 < \Delta C_2$ 라 가정하자. 두 비용변화 중 하나는 실제 발생한 비용변화이며 다른 하나는 측정된 비용변화이나 두 비용변화 중 어느 것이 큰지는 알 수 없다. 만약, 작은 비용변화, ΔC_1 에 의하여 상태변화가 수락되어도, 큰 비용변화, ΔC_2 에 의하여 상태변화가 거절될 수 있다. 이때 비용오류, $\Delta E = \Delta C_2 - \Delta C_1$ 에 의하여 상태변환 오류가 발생한다.

정리 1 : 제안된 상태변환이 실제와 측정된 비용변화 중 작은 비용변화인 ΔC_1 에 의하여 수락되었을 때, 상태변환에 대한 수락 오류는 매개변수인 온도 T 에 대하여 지수분포를 가지고 있다.

$$\Pr[\text{The erroneous move decision with cost error } [0, \Delta E]] = \Pr[\text{Move rejected with cost change } \Delta C_2 | \text{Move accepted with cost change } \Delta C_1] = 1 - e^{-\frac{\Delta E}{T}}$$

<증명> 연속 확률변수 $\gamma_{\Delta C}$ 은 비용오류, ΔE 에 의하여 hill-climb 상태변환에 대한 수락 오류를 발생하는 함수로 정의하자. 또한, 두 비용변화, ΔC_1 과 ΔC_2 는 $\Delta C_1 < \Delta C_2$ 를 만족하며 $\Delta E \equiv \Delta C_2 - \Delta C_1$ 으로 정의한다. 비용오류는 양의 실수 값을 취한다. 상태변환에 대한 수락 오류는 제안된 상태변환이 작은 비용변화 ΔC_1 으로 수락되거나 큰 비용변화 ΔC_2 로 거절된 사건으로 정의된다. 확률변수 $\gamma_{\Delta C_1}$ 은 상태변화 수락에 대한 여분인생(excess life)으로 표현된다. 즉, $\gamma_{\Delta C_1} = S_{N(\Delta C_1)+1} - \Delta C_1$ 이고 여기서 $N(\Delta C_1)$ 은 비용변화 $[0, \Delta C_1]$ 구간에서의 수락의 회수를 나타내며, S_n 은 상태변환이 n 번 수락되었을 때 비용변화의 합을 나타낸다 그러므로 $\gamma_{\Delta C_1}$ 은 제안된 상태변환이 작은 비용변화 ΔC_1 에 의하여 수락된 후 상태 수락이 얼마 동안 유지될 것인지를 나타낸다. 즉, $S_{M(\Delta C_1)+1}$ 은 제안된 상태변환이 ΔC_1 으로 수락된 후 상태변환에 대한 거절이 일어나는 비용변화를 나타낸다.

$$\begin{aligned} \Pr[\gamma_{\Delta C_1} \leq \Delta E] &= \Pr[S_{M(\Delta C_1)+1} - \Delta C_1 \leq \Delta E] \\ &= \Pr[S_{M(\Delta C_1)+1} \leq \Delta E + \Delta C_1] \\ &= \Pr[N(\Delta E + \Delta C_1) \geq N(\Delta C_1) + 1] \\ &\quad (N(C) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq C \text{ 으로부터}) \\ &= \Pr[N(\Delta E + \Delta C_1) - N(\Delta C_1) \geq 1] \\ &= 1 - \Pr[N(\Delta E + \Delta C_1) - N(\Delta C_1) \leq 0] \\ &= 1 - \Pr[N(\Delta E + \Delta C_1) - N(\Delta C_1) = 0] \\ &\quad (\text{거절의 회수는 음수가 될 수 없으므로}) \\ &= 1 - \Pr[N(\Delta E) = 0] \\ &\quad (\text{지수분포의 비메모리특성으로부터}) \\ &= 1 - e^{-\frac{\Delta E}{T}} \quad \square \end{aligned}$$

낙관적 오류(optimistic error)는 계산된 비용변화 (ΔC_e)가 실제 비용변화(ΔC_a)보다 작을 때 발생한다 ($\Delta C_e > \Delta C_a > 0$). 반면에 비관적 오류(pessimistic error)는 실제 비용변화가 계산된 비용변화보다 작을 때 발생한다($\Delta C_e > \Delta C_a > 0$). 따라서 낙관적 오류는 수락율을 높이며 비관적 오류는 수락율을 낮춘다 각 상태변환의 경우에 대한 수락 결정[5]을 위의 비용변화에 적용하여 낙관(optimistic) 및 비관(pessimistic) 비용오류의 확률을 구하였다.

정의 2 : 낙관적 비용오류 확률

$$P_{opt} = \Pr[\Delta C_e \geq \Delta C_c > 0] \cdot \left| e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} \cdot \left(e^{-\frac{\Delta E}{T}} - 1 \right) \right|$$

정의 3 : 비관적 비용오류의 확률

$$P_{pes} = \Pr[\Delta C_e \geq \Delta C_c > 0] \cdot \left| e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} \cdot \left(e^{\frac{\Delta E}{T}} - 1 \right) \right|$$

전체 비용오류, E 는 낙관적 비용오류와 비관적 비용오류의 산술 합으로서 구해진다

정리 2 : 비용오류

$$E \leq \Delta C_c \cdot \Pr[\Delta C_e > 0] \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} \cdot \left(e^{\frac{\Delta E}{T}} - 1 \right)$$

<증명> 발생하는 비용오류는 낙관적 비용오류 또는 비관적 비용오류 중 하나로 분류되며 따라서 전체 비용오류는 두 비용오류의 합으로서 정의되므로 다음과 같은 식이 구해진다.

$$\begin{aligned} E &= \Delta C_c \cdot (P_{opt} + P_{pes}) \\ &\leq \Delta C_c \cdot \Pr[\Delta C_e > 0] \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} \cdot \left(e^{\frac{\Delta E}{T}} - 1 \right) \quad \square \end{aligned}$$

비용오류는 hill-climb 상태변화에 의하여 감내되므로 각 온도에서의 hill-climb 능력의 최대 값을 이용하여 허용 가능한 비용오류의 최대한계를 구한다. $d(s)$ 를 주어진 온도 T 및 스트림 길이 s 에 대하여 극복 될 수 있는 다시 말하여 hill-climbed 가능한 비용의 최대 값이라 정의하자 s 번의 상태변화에서 $d(s)$ 의 hill-climb 상태변화가 발생할 조건을 다음과 같이 정의하였다[6].

정의 4 : 일정 온도 T 에서 상태변환의 회수에 대한 hill-climb 능력, $d(s)$.

$$e^{-\frac{d(s)}{T}} \geq \frac{1}{s} \Rightarrow d(s) \leq T \cdot \ln s$$

또한, 비용오류가 발생 시 평균 비용변화에 대한 진동 폭이 감소된다. 이러한 현상은 hill-climb 능력의 감소에 기인하므로 다음의 보조정리를 이끌어 낼 수 있다

보조정리 1 : 비용오류가 존재하는 알고리즘에서 하나의 상태변화에 대한 hill-climb 능력은 다음과 같이 정의된다

$$d_f \leq d_b + E$$

여기서 d_f 는 비용오류가 존재하지 않았을 때(error-free)의 hill-climb 능력을 나타내며, d_b 는 비용오류가 존재(error-present)하는 알고리즘에서의 hill-climb 능력을 나타낸다.

<증명> hill-climb 능력의 감소는 비관적 오류, $\Delta C_e > \Delta C_c > 0$ 에 의하여 발생하며, hill-climb 능력 $d_f = \Delta C_c \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}}$ 와 $d_b = \Delta C_c \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}}$ 로 표기된다. 정리 2의 비용오류 E 와 비관적 오류의 조건으로부터 다음 식을 얻을 수 있다

$$\begin{aligned} d_f - (d_b + E) &= \Delta C_c \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} - \left(\Delta C_c \cdot e^{-\frac{\Delta C_c - \Delta E}{T}} \right) \\ &= \Delta C_c \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} - \Delta C_c \cdot e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} \\ &= e^{-\frac{\Delta C_c}{T}} \cdot (\Delta C_c - \Delta C_c) \leq 0 \end{aligned}$$

(비관적 조건으로부터)

따라서, $d_f \leq d_b + E$ □

다음 최적 스트림의 길이는 스트림 길이 s 에서의 비용오류의 총합, $E(s)$ 로부터 계산된다

정리 3 : 스트림 길이 s 동안에 비용오류 $E(s)$ 가 발생할 때 발생한 비용오류를 감내하기 위해서는 $s \cdot u$ 의 상태변환이 추가로 필요하다.

<증명> $e^{-\frac{d}{T}} \geq e^{-\frac{d_b + E}{T}}$ (보조정리 1로부터)

$$e^{-\frac{d_f(s)}{T}} \geq e^{-\frac{d_b(s) + E(s)}{T}}$$

(ergodicty 특성으로부터)

$$= e^{-\frac{d_f(s)}{T}} \cdot e^{-\frac{E(s)}{T}} \geq \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{u}$$

(정의 4로부터) □

따라서 비용오류 발생 시 $s \cdot u$ 만큼의 상태변환이 비용오류가 발생하지 않았을 때의 hill-climb 능력을 유지하기 위해서 필요하다. 개념적으로 추가된 상태변환의 수(Markov 사슬 길이), $s \cdot u - s$,는 감소된 hill-climb 능력을 보상하여 최적해 접근 특성을 유지하게 한다.

본 논문에서는 발생한 비용오류를 감내하기 위해서 스트림 길이를 고정시키고 비용오류의 최대 허용한계를 구하는 대신 먼저 비용오류의 최대 허용한계를 고정시킴으로서 측정된 비용오류의 합을 정의된 비용오

류의 최대 허용한계와 비교하여 스트림 길이를 동적으로 조정하는 직용성이 뛰어난 알고리즘을 개발하였다. 본 논문에서는 측정된 비용오류의 합이 비용오류의 최대 허용한계보다 크면 스트림 길이를 반으로 줄이며, 반대로 측정된 비용오류의 합이 비용오류의 최대 허용한계보다 작으면 스트림 길이를 1씩 증가하였다. 따라서 본 알고리즘은 전역 갱신 빈도를 조절함으로써 비용오류가 존재하지 않았을 때의 최적해 접근 특성을 유지하면서 수행 시간을 절약한다.

4. 비용오류 분석

시뮬레이티드 어닐링에서 비용오류는 하나의 상태변환 시 발생하는 일시적(temporary) 오류와 잘못된 상태정보 또는 실행 시간을 절약하기 위하여 상태정보를 변형하여 사용할 때 발생하는 누적(cumulative) 오류로 구분된다[7]. 이 중 누적오류가 최적해 접근 특성에 영향을 미친다. 정의 1에 의한 기존의 비용오류 측정 방법은 누적오류를 측정하기 위하여 고정된 스트림 길이 s 만큼 각 프로세서가 지역 상태정보를 이용하여 상태변환을 수행한 후 전역 갱신 후 실제 비용변화, ΔC_a ,와 측정된 비용변화, ΔC_e ,의 차이로 비용오류를 계산한다. 이러한 기존의 비용오류 측정 방법은 다음의 3가지 문제점을 가지고 있다.

첫째, 상태변환이 수락되었을 때 발생하는 비용오류만을 고려한다. 즉, hill-climb 상태변환 중 측정된 비용변화가 실제 비용변화보다 큰 비관적 오류, $\Delta C_e > \Delta C_a > 0$, 발생 시 실제 비용변화로는 수락되는 상태변화가 비용오류가 포함된 측정 비용변화로는 거절될 수 있다 ($e^{-\frac{\Delta C_e}{T}} < e^{-\frac{\Delta C_a}{T}}$). 이 경우 비용오류에 의하여 상태변환에 오류가 발생하나 기존의 비용오류 측정 방법은 거절된 상태변환에 대한 측정이 불가능하므로 이러한 종류의 비용오류는 계산하지 못한다.

둘째, 실제 비용변화와 측정 비용변화가 모두 음수일 때($\Delta C_e, \Delta C_a < 0$), 비용오류에 상관없이 새로운 상태는 항상 수락된다. 이 경우 상태변환이 올바르게 수행되었음에도 불구하고 기존의 방법은 두 비용변화의 차, $\Delta E = \Delta C_a - \Delta C_e$,를 계산하여 비용오류 E 에 누적한다.

셋째, 주어진 스트림 길이 동안 발생하는 낙관적 오

류와 비관적 오류가 서로 상쇄되어 오류의 크기가 감소한다. 따라서 기존의 방법은 대강의 평균 비용오류만이 계산되어 정량적인 수식에 적용할 수가 없다.

새로이 제안된 비용오류 측정 방법은 이러한 3가지 문제점을 해결한다. 먼저, 정의 2 및 정의 3으로부터 모든 hill-climb 상태변환에 대하여 비용오류(ΔE)가 확률적으로 구해진 후 총 비용오류(E)에 더해진다(정리 2) 따라서 거절된 상태변환에 대하여도 이에 따른 비용오류가 계산된다. 둘째, 새로운 방법은 hill-climb 상태변환에 대한 비용오류만을 계산하므로 음수 비용변화에 대한 상태변환은 포함되지 않는다. 마지막으로, 낙관적 비용오류 및 비관적 비용오류의 값은 모두 양수이므로 두 비용오류가 서로 상쇄되지 않는다.

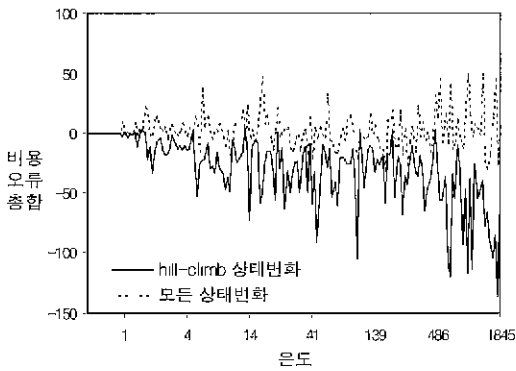
기존의 방법(정의 1)을 이용하여 비용오류(ΔE_e)를 측정하면 전 온도 범위에서 비용오류는 대부분 음수를 나타낸다. 또한, 높은 온도 범위에서 비용오류의 절대값은 크나 온도가 감소함에 따라 비용오류도 0으로 감소한다. 이는 온도가 낮아짐에 따라 제안된 상태변환에 대한 수락율이 작아지며 낮은 온도 범위에서는 비용오류를 일으키는 상태변환의 발생이 감소하기 때문이다. 다음은 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘에서 비용오류가 존재할 때 일어나는 현상을 정량적으로 분석한다.

본 실험에 사용된 재료 제단 문제는 조합 최적화 문제 중 하나로 정형 또는 비정형의 여러 가지 모양을 2차원 원판에 버려지는 부분이 최소가 되게 배치한 후 절단하는 문제이다[8]. 재료 제단 문제는 비철산업, 조선업, VLSI 설계, 제강, 가구, 유리 산업 등 여러 산업 분야에 적용된다. 본 문제는 일종의 2차원 2진 패킹 문제로 NP-Complete 군으로 분류된다 따라서 본 문제를 해결할 다항식 알고리즘은 존재하지 않으므로 경험적 알고리즘의 하나인 시뮬레이티드 어닐링을 사용하여 최적 배치를 찾는다.

(그림 2)부터 (그림 7)는 16개의 비정형 모양을 MPI(Message Passing Interface) 상의 4개의 프로세스를 사용하여 배치하였을 때의 결과를 보여준다. 일정 온도에서의 Markov 사슬 길이는 500이며 온도 감소 비율은 0.98이고 최대 스트림 길이는 125로 정하였다. 비용오류의 정확한 측정을 위하여 각 프로세스는 지역 상태정보와 더불어 전역 상태 정보를 가진다. 지역 상태 정보는 앞에서 설명한 바와 같이 스트림 길이만큼의 상태변환 후 갱신되나, 전역 상태정보는 해당 프로

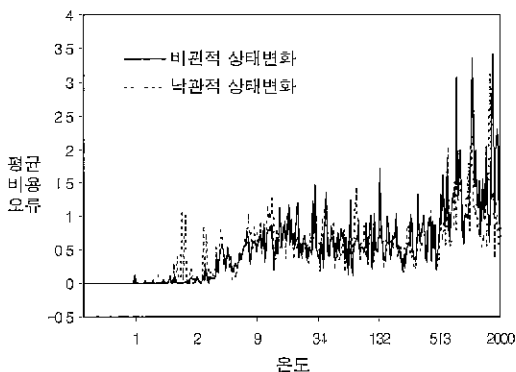
세스의 경우 상태변환 후 즉시 갱신되나 다른 프로세스의 경우 병렬성을 유지하기 위하여 매 상태변환 시마다 MPI_Isend를 사용하여 비동기적으로 갱신된다. 따라서 측정된 비용변화(ΔC_s)는 지역 상태정보로부터 구해지나, 실제 비용변화(ΔC_g)는 전역 상태정보로부터 정확하게 구해진다.

(그림 2)는 발생한 비용오류는 0을 중심으로 코르게 분포되어 있음을 보여준다. 그러나 수락된 상태변환 중 hill-climb 상태변환 부분만을 측정하였을 때는 비용오류가 대부분 음수임을 보여준다.



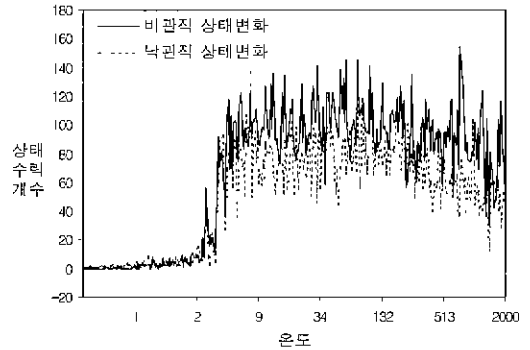
(그림 2) 은도에 대한 총 비용오류 변화

(그림 3)으로부터 비관적 상태변환 및 낙관적 상태변환에 대한 각각의 평균 비용오류의 절대값은 높은 온도 범위에서 거의 비슷하나 임계(중간) 및 낮은 온도 영역에서는 비관적 평균 비용오류의 절대값은 낙관적 상태변환 시보다 약간 작음을 알 수 있다.



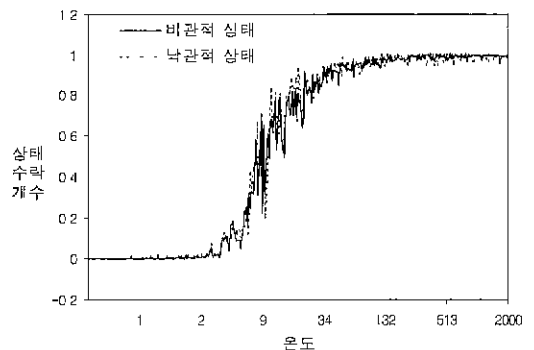
(그림 3) 하나의 수락된 hill-climb 상태변환에 대한 평균 비용오류

(그림 4)에서 비관적 상태변환에 대한 수락의 개수가 낙관적 상태변환 시보다 크다. 따라서, (그림 3) 및 (그림 4)로부터 비관적 비용오류의 총합이 낙관적 비용오류의 총합보다 크다는 것을 예측할 수 있다. 이 사실은 (그림 2)의 결과와 일치한다.



(그림 4) hill-climb 상태변환에 대한 수락 개수

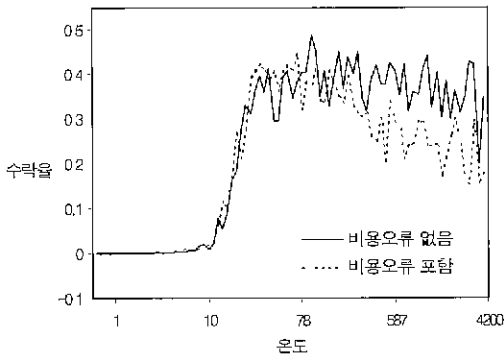
(그림 5)는 hill-climb 상태변환에 대한 수락율을 보여준다. 낙관적 및 비관적 hill-climb 상태변환에 대한 수락율은 전 온도 범위에서 거의 비슷하다. 따라서 (그림 4)와 (그림 5)로부터 비관적 hill-climb 상태변환이 낙관적 상태변환보다 더 많이 발생함을 알 수 있다.



(그림 5) hill-climb 상태변환의 수락율

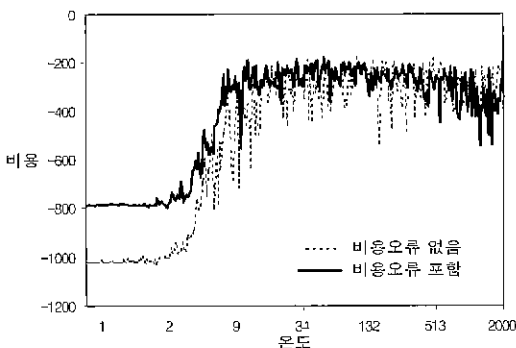
(그림 6)은 비용오류가 존재할 때와 존재하지 않을 때의 hill-climb 상태변환에 대한 수락율을 비교한다. 비용오류가 포함된 알고리즘에서의 수락율이 비용오류가 존재하지 않을 때보다 작다. 이는 비관적 상태변환이 낙관적 상태변환보다 많이 발생하고 비관적 상태변

화는 수락을 감소시키기 때문이다. 임계(중간) 온도 영역에서는 hill-climb 상태변화가 수락될 확률이 급속히 감소하기 시작하므로 비용오류가 존재할 때와 존재하지 않을 때의 수락율이 거의 비슷하게 된다. 낮은 온도 영역에서는 수락되는 상태변화의 비용변화 값은 대부분 음수이다. 비용오류가 증가할 때, 일반적으로 낮은 온도 범위에서 수락율이 증가하는 경향을 보인다. 이는 비용오류로 인하여 잘못된 상태변환이 발생하며 이를 다시 수정하는 상태변환이 반복 발생하기 때문이다.



(그림 6) 모든 상태변환에 대한 수락율

마지막으로 비용오류가 존재할 때 흥미 있는 현상은 높은 온도 및 임계 온도 영역에서 온도에 대한 평균 비용변화($\langle \Delta C \rangle$ vs. T)의 진동 폭이 감소한다(그림 7)[7]. 높은 온도 및 임계 온도 영역에서는 비관적 상태변화가 낙관적 상태변화보다 자주 발생하므로, 비용변화에 대한 진동 폭이 감소한다. 진동 폭의 감소는 지역 최적해에 갇히어 전역 최적해의 도달을 막을 수 있다. 비용오류가



(그림 7) 온도에 대한 비용의 진동 폭

존재하는 알고리즘에서 hill-climb 상태변화는 비용오류가 존재하지 않을 때보다 비관적 오류에 의하여 더 자주 거절되므로 비용오류가 존재할 때의 평균 비용은 비용오류가 존재하지 않을 때보다 작다.

이러한 현상들은 다음 정리에서 수학적으로 규명된다.

정리 4: 아래의 조건들을 가정하면, 수락된 hill-climb 상태변환에 대한 비용오류는 음수이다.

- ① hill-climb 상태변환에서 비용오류(ΔE)는 측정된 비용변화(ΔC_e)보다 작다
- ② 상태변환 시 비관적 및 낙관적 비용오류의 크기는 같다.
- ③ 측정 비용변화만을 알 수 있으므로 실제 비용변화(ΔC_a)는 다음 식으로 계산된다.

$$\Delta C_a = \Delta C_e \pm \Delta E$$

<중명> 스트림 길이를 너무 크게 하여 아주 잘못된 지역 상태 정보를 가지고 있지 않은 한 일반적으로 비용오류는 측정 비용오류보다 작으므로 첫 번째 가정은 타당하다. (그림 3)으로부터 두 번째 가정을 이끌어 낼 수 있다. 마지막으로 우리가 알 수 있는 것은 측정 비용변화이므로 이를 이용하여 실제 비용변화를 계산해야 하며, 두 비용변화의 차이는 비용오류 만큼이므로 세 번째 가정도 타당하다. (그림 4)로부터 오직 비관적 상태변환의 발생 수가 낙관적 상태변환보다 크다는 것을 알 수 있으며, (그림 5)는 비관적 상태변화와 낙관적 상태변화에 대한 수락율이 거의 비슷하다는 것을 알려준다. 따라서 (그림 4 및 5)로부터 비관적 상태변환이 낙관적 상태변환보다 더 자주 발생한다는 것을 알 수 있다.

즉, $\Pr[\Delta C_e > \Delta C_a > 0] \leq \Pr[\Delta C_e > \Delta C_a > 0]$ 이다 □

정의 2 및 3으로부터 온도 T , $\Delta E > 0$ 일 때, $|e^{-\frac{\Delta E}{T}} - 1| < |e^{\frac{\Delta E}{T}} - 1|$ 이므로 낙관적 비용오류의 확률(P_{opt})이 비관적 비용오류의 확률(P_{non})보다 작다는 것을 알 수 있다.

[9]은 문제의 종류 및 알고리즘에 따라서 비용오류를 감내하는 정도가 다름을 지적하였다. 이는 정리 5로부터 규명된다.

정리 5: 비용오류의 총합(E)은 측정 비용변화에서의 비용오류(ΔE)의 비율에 좌우된다.

<증명> 비용함수는 비용오류를 발생하는 항과 비용오류를 발생하지 않는 항으로 구성된다. 정리 2로부터 비용오류(ΔE)가 측정 비용변화(ΔC_e)에서 아주 작은 비율만을 차지할 때, 즉 $\Delta E \ll \Delta C_e$ 이면 비용오류가 발생할 확률은 0으로 접근한다.

$$E \propto e^{-\frac{\Delta C_e}{T}} \cdot \left(e^{\frac{\Delta E}{T}} - 1 \right) = e^{-\frac{\Delta C_e - \Delta E}{T}} - e^{-\frac{\Delta C_e}{T}} \approx 0 \quad \square$$

hill-climb 상태변환에서 $\Delta C_e > \Delta E > 0$ 이므로 비용오류의 총합(E)은 항상 양의 값을 갖는다. 따라서, 비용오류에 대한 감내 정도는 측정 비용변화내의 비용오류 비율로서 구해진다. 정리 5는 문제를 잘 분석하여 비용오류를 발생하는 항을 줄이는 것이 알고리즘 설계에 중요하다는 것을 말하여 준다. 따라서 정리 4 및 5로부터 새로이 제안된 비용오류 측정법은 비용오류 발생 시 일어나는 현상을 분석적으로 설명하여 주는 훌륭한 도구 역할을 한다.

5. 결 론

제안된 비용오류 측정 방법은 기존의 비용오류 측정법의 단점을 보완하여 누적 오류의 크기를 정확하게 측정하며 발생한 비용오류를 감내하여 최적해 접근 특성을 유지하게 한다. 시뮬레이티드 어닐링 과정에 비용오류가 포함될 때 낙관적 상태변화보다 비관적 심태변화가 발생할 확률이 크므로 그 만큼 hill-climb 상태변화가 거절될 확률이 커지며, 따라서 비용변화의 진동폭도 줄어들게 되어 지역 최소 상태에서 빠져 나올 확률도 줄어들어 최종적으로 최적해에 도달하지 못하게 된다. 따라서 제안된 비용오류 측정법은 비용오류에 의하여 감소된 hill-climb 능력을 정량적으로 측정하여 이를 보상하기 위하여 여분의 상태변환을 수행한다.

비용오류 존재 시 발생하는 현상으로는 첫째, 비관적 hill-climb 상태변환이 낙관적 상태변환이 더 자주 발생하며, 둘째, 상태변환에 대한 수락율이 감소하고, 마지막으로 어닐링 곡선의 진동 폭이 줄어들다. 본 논문에서는 제안된 비용오류 측정법을 사용하여 이러한 3가지 현상을 수학적으로 분석 규명하였다.

참 고 문 헌

- [1] S. Lee and K. Lee, "Synchronous and Asynchronous Parallel Simulated Annealing with Multiple Markov Chains," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol.7, No.10, pp.993-1008, 1996
- [2] R. Jayaraman and F. Darma, "Error Tolerance in Parallel Simulated Annealing Technique," Proc. the International Conference on Computer Design, pp 545-548, 1988.
- [3] L.K. Grover, "A New Simulated Annealing Algorithm for Standard Cell Placement," Proc. the International Conference on Computer-Aided Design, pp 378-380, November 1986.
- [4] J. Chandy, S. Kim, B. Ramkumar, S. Parkes, and P. Banerjee, "An Evaluation of Parallel Simulated Annealing Strategies with Application to Standard Cell Placement," IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol.16, No.4, pp.398-409, 1997.
- [5] C. Hong and B. McMillin, "Relaxing Synchronization in Distributed Simulated Annealing," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, Vol.6, No.2, pp. 189-195, 1995.
- [6] D. Greening, "Simulated Annealing with Errors," Ph. D. Dissertation, University of California-Los Angeles, 1995.
- [7] M.D. Durand, "Parallel Simulated Annealing: Accuracy versus speed in placement." IEEE Design and Test, pp.8-34, June 1989
- [8] C. Dagli and P. Poshyanonda, "New Approaches to Nesting Rectangular Patterns," Journal of Intelligent Manufacturing, Vol.8, pp.177-190, 1997.
- [9] M.D. Durand and S.R. White, "Permissible Error in Parallel Simulated Annealing." Technical Report RC15487, IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, 1990.



홍철의

e-mail : hongch@pine.sangmyung.ac.kr

1985년 한양대학교 금속공학과
졸업(학사)

1989년 미국 New Jersey Institute
of Technology 전산학(석사)

1992년 미국 Univ. of Missouri-
Rolla 전산학(박사)

1992년~1997년 한국전자통신연구원 선임연구원

1997년~현재 상명대학교 정보통신학부 조교수

관심분야 : 기계학습, 최적화 기법, 분산처리



김영준

e-mail : yjkim@pine.sangmyung.ac.kr

1984년 고려대학교 산업공학과
졸업(학사)

1990년 미국 Univ. of Houston
전산학(석사)

1996년 미국 Univ. of Houston
전산학(박사)

1997년~현재 상명대학교 정보통신학부 조교수

관심분야 : 기계학습, 유전자 알고리즘, 전문가 시스템