Folded 하이퍼-스타 그래프의 병렬 경로

이 형 옥† · 최 정†† · 박 승 배††† · 조 정 호†††† · 임 형 석†††††

요 약

상호 연결망에서 병렬 경로는 전송할 메시지를 패킷으로 분할하여 여러 개의 경로를 통하여 동시에 전송할 수 있어서 메시지 전송 시간을 줄일 수 있으며, 라우팅 경로상의 노드나 에지가 고장이 발생했을 때 메시지 전송을 위한 대체 경로를 설정할 수 있으므로 중요한 의미를 갖는다. $2n$개의 이진수로 노드를 표현하는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$은 하이퍼큐브와 그의 변형된 그래프보다 망 비용이 개선된 상호 연결망이다.

본 논문에서는 병렬 컴퓨터의 위상으로 제안된 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 노드 중복하지 않는 병렬 경로를 분석하고, 그 결과를 이용하여 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 고장 지름이 $2n$-1임을 분석한다.

Parallel Paths in Folded Hyper-Star Graph

Hyeong-Ok Lee† · Jung Choi†† · Seung-Bae Park††† ·
Chung-Ho Cho†††† · Hyeong-Seok Lim†††††

ABSTRACT

Parallel paths in an interconnection network have some significance in that message transmission time can be reduced because message is divided into packets and transmitted in parallel through several paths, and also an alternative path can be established when nodes and edges fault on routing path. A Folded Hyper-Star graph $FHS(2n,n)$, whose nodes has $2n$ binary bit string, is an interconnection network which has a lower network cost than hypercube and its variation.

In this paper, we analyze node disjoint parallel path in a Folded Hyper-Star graph $FHS(2n,n)$ proposed as the topology of parallel computers and, using the result, prove that the fault diameter of a Folded Hyper-Star graph $FHS(2n,n)$ is $2n$-1.

1. 서 론

오늘날 공학과 과학 분야의 다수의 응용 문제들은 많은 계산을 수행하면서 동시에 실시간 처리를 필요로 하므로 빠른 계산 능력을 갖는 고성능 컴퓨터에 대한 요구의 증가로 인해 병렬 처리 컴퓨터에 대한 관심이 증가하고 있다. 병렬 처리 컴퓨터는 크게 공유 메모리를 갖는 다중 프로세서(multiprocessor)시스템과 분산 메모리를 갖는 다중 컴퓨터(multicomputer)시스템으로 나눌 수 있다. 다중 컴퓨터 시스템은 자신의 메모리를 갖는 프로세서들을 상호 연결망으로 연결하고, 프로세서들 사이에 통신은 상호 연결망을 통해 메시지를 교환하는 방식으로 이루어진다. 이러한 다중 컴퓨터에서 각 프로세서를 연결하는 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 확장성에 큰 영향을 미치는 것으로 병

† 준 회 원 : 전남대학교 대학원 전산통계학과
†† 정 회 원 : 기전여자대학 교수
††† 정 회 원 : 초당대학교 컴퓨터과학과 교수
†††† 종신회원 : 광주대학교 컴퓨터전자통신공학부 교수
††††† 정 회 원 : 전남대학교 전산통계학과 교수
논문접수 : 1998년 11월 3일, 심사완료 : 1999년 5월 31일

렬 처리 컴퓨터 개발의 기반 기술 제공을 위해 그 필요성이 증가되고 있다[1].

상호 연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프(undirected graph)로써 표현 될 수 있다. 상호 연결망을 평가하는 망 척도는 분지수, 연결도, 확장성, 지름, 고장 허용도 및 대칭성 등이 있다[1,9]. 지금까지 제안된 상호 연결망은 크게 트리, 메쉬 부류[2,6], 하이퍼큐브 부류[5,9], star 그래프 부류[1]로 나눌 수 있다. 연결망의 망 척도중 하드웨어의 비용과 관련된 분지수(degree)와 메시지의 전송 시간과 관련된 지름(diameter)은 상호간에 상관관계를 갖고 있다. 이러한 특성 때문에 상호 연결망을 비교 평가하기 위해 연결망의 분지수(degree)×지름(diameter) 값으로 정의되는 망 비용(network cost)[3,6]이 있다. 상호 연결망의 비용은 연결망이 같은 개수의 노드를 가질 때 분지수×지름 값이 작은 연결망이 좋은 특성을 갖는 것으로 분석된다. 여러 가지 상호 연결망에 대한 망 비용의 비교 평가는 [9]에 있다.

하이퍼큐브와 그의 변형들보다 망 비용이 훨씬 작은 값을 갖는 Folded 하이퍼-스타 그래프는 하이퍼큐브와 격자 구조를 갖는 메쉬를 연장율 2에 사상할 수 있어서 하이퍼큐브와 격자 메쉬 구조에서 수행되는 알고리즘을 적은 비용으로 시뮬레이션 할 수 있는 장점을 갖는 상호 연결망으로 [9]에서 제안되었다. 상호 연결망을 구성하는 요소중의 일부가 고장이 발생했을 때 고장난 노드나 에지를 제외한 나머지 부분들은 감소된 용량을 최대한 활용하면서 작업을 계속 수행할 수 있어야 한다. 대규모 병렬 처리를 위한 다중 컴퓨터에서 연결망이 커질수록 모든 부분이 고장이 없을 확률은 작아지므로 큰 연결 망일수록 높은 고장 허용도를 필요로 한다. 상호 연결망 G의 지름은 연결망을 구성하는 노드들중 임의의 두 개 노드 사이에 최단 경로 길이중 최대 값으로 $dia(G)$로 표현한다. 노드 연결도가 n인 상호 연결망 G에서 최대 n-1개의 노드가 고장이 발생했을 때, 그 연결망은 항상 연결된 상태로 있지만 연결망의 지름은 크게 증가할 수 있다. 상호 연결망에서 고장 허용도를 평가하기 위한 망 척도로 고장 지름(fault diameter)[1,4,7,8]이 있다. 연결망 G의 고장 지름이란 연결망 G가 나누어지지 않는 한도 내에서 노드가 고장이 발생했을 때 최대 지름을 의미하는 것으로 f_G으로 표현한다. 연결망 G의 고장 지름이 G의 지름과 비슷하다는 것은 G에서 연결도 미만의 노드가 고장이 발생해도 통신 지연 시간이 크게 늘어나지 않음을 의미한다. 연결망 G의 고장 지름이 $f_G \le dia(G)+c$일 때 연결망 G를 strongly resilient하다고 하고, G의 고장 지름이 $f_G \le c*dia(G)$일 때 연결망 G를 weakly resilient하다고 한다[1,4](단, c는 상수 값이다).

상호 연결망에서 고장 지름을 분석하는 문제는 그래프의 곱[7]을 이용한 방법과 병렬 경로[8]를 이용한 방법이 있다. 상호 연결망에서 병렬 경로는 임의의 두 노드 사이에 노드 중복하지 않는 경로가 여러 개 존재하는 것으로, 두 노드 사이에 많은 양의 데이터를 전송할 때 메시지 전송 속도를 향상할 수 있을 뿐만 아니라, 경로상의 노드나 에지가 고장이 발생해도 대체 경로를 설정할 수 있으므로 중요한 의미를 갖는다[4,7,8].

본 논문에서는 상호 연결망의 망 비용이 하이퍼큐브와 그의 변형들보다 작은 값을 갖는 Folded 하이퍼-스타 그래프에서 고장 허용도를 분석하기 위해 분지수 만큼의 노드 중복 없는 병렬 경로(node disjoint parallel path)를 구성하는 방법을 제안하고 병렬 경로의 길이를 분석한다. 또한 그 결과를 이용하여 Folded 하이퍼-스타 그래프에서의 고장 지름을 알아본다. 논문의 구성은 2장에서는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 정의와 성질을 알아보고, 3장에서는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 병렬 경로를 분석하고, 마지막으로 결론을 맺는다.

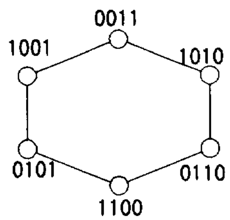
2. Folded 하이퍼-스타 그래프의 정의와 성질

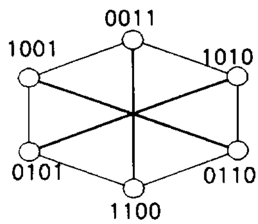
상호 연결망 $G=(V_G, E_G)$에서 V_G는 연결망 G의 노드들의 집합, E_G는 연결망 G의 에지들의 집합이라 할 때, 하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)=(V_{HS(n,k)}, E_{HS(n,k)})$의 노드 $V_{FHS(n,k)}$와 에지 $E_{FHS(n,k)}$는 다음과 같이 정의 할 수 있다. 하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)$의 노드를 $U=u_1u_2...u_i...u_n$, $u_i \in \{0,1\}$이라 할 때, 노드를 연결하는 에지는 교환연산(swap operation)으로 정의한다.

$$V_{HS(n,k)}=\{U \mid u_1u_2...u_i...u_n,\ |u_i=\text{"1"}|=k,\ 1 \le i \le n\}$$
$$E_{HS(n,k)}=\{(U,U') \mid U,\ U' \in V_{HS(n,k)} \text{ and } U'=U \cdot (1,i),\ 2 \le i \le n\}$$

하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)$의 교환 연산은 노드 U의 비트 스트링 $u_1u_2...u_i...u_n$에서 첫 번째 이진 심벌 u_1과 i번째 이진 심벌 u_i가 서로 보수(즉, $u_1=\overline{u_i}$)이고,

그리고 이진 심벌 u_1과 u_i가 서로 교환된 이진 비트 스트링 $u_i u_2 ... u_1 ... u_n$을 연결하는 것으로 "• (1,i)"으로 나타낸다($2 \leq i \leq n$). 또한 첫 번째 심벌과 i번째 심벌을 교환하여 생성된 노드를 연결하는 에지를 i-차원 에지라 한다. 예를 들어 이진 비트 스트링이 01010일 때 교환 연산 01010 • (1,2) = 10010이고, 그리고 노드 01010과 10010을 연결하는 에지를 2-차원 에지라 한다. (그림 1)은 위의 정의에 따라 구성된 하이퍼-스타 그래프 $HS(4,2)$의 예이다.





(그림 1) $HS(4,2)$ 그래프 (그림 2) $FHS(4,2)$ 그래프

하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)$의 원시노드 $s(s_1 s_2 ... s_n)$와 목적노드 $d(d_1 d_2 ... d_n)$에서 노드 s에서 d까지 메시지 전송을 위한 라우팅은 노드 s와 d의 비트 스트링을 Exclusive-OR한 비트 스트링 $r(r_1 r_2 ... r_n)$에서 r_i="1"을 갖는 i번째 위치의 노드 s와 d의 심볼이 서로 같아지도록 하는 i-차원 에지의 패스가 라우팅 경로이다($2 \leq i \leq n$). 하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)$에서 지름 길이를 갖는 경로는 원시 노드와 목적 노드의 비트 스트링이 서로 보수 관계인 경우이다. 이러한 하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)$의 지름을 개선하기 위하여 노드의 비트 스트링이 서로 보수 관계인 노드를 연결하는 에지를 한 개 추가하여 구성한 그래프를 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(n,k)$라 하고, 추가된 에지를 c-차원에지라 한다.

하이퍼-스타 그래프 $HS(n,k)$의 에지 정의에 c-차원 에지를 한 개 추가하여 구성한 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(n,k)=(V_{FHS(n,k)}, E_{FHS(n,k)})$의 노드 $V_{FHS(n,k)}$와 에지 $E_{FHS(n,k)}$는 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$V_{FHS(n,k)}=\{U \mid u_1 u_2 ... u_i ... u_n,\ |u_i=\text{"1"}|=k,\ 1 \leq i \leq n\}$$

$$E_{FHS(n,k)}=\{(U,U') \mid U,\ U' \in V_{FHS(n,k)} \text{ and } U'=U \cdot (1,i),\ 2 \leq i \leq n\} \text{ or } \{(U,U') \mid U,\ U' \in V_{FHS(n,k)} \text{ and } U'=\overline{U}\ \}$$

위의 정의에 의해 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)=(V_{FHS(2n,n)}, E_{FHS(2n,n)})$의 노드를 나타내는 이진 비트 스트링의 개수는 항상 짝수개로 구성되어 있고, 이진 비트 스트링을 구성하는 "0"과 "1"의 개수는 동일함을 알 수 있다. 따라서 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 노드수는 ${}_{2n}C_n$이고, 분지수는 n+1을 갖는 정규 연결망이다. (그림 2)는 위의 정의에 따라 구성된 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(4,2)$의 예이다. 본 논문에서는 정규 연결망을 갖는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에 대하여 병렬 경로를 분석한다.

3. Folded 하이퍼-스타 $FHS(2n,n)$의 병렬 경로

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 분지수는 n+1이므로, $FHS(2n,n)$의 임의의 두 노드간에 n+1개의 노드 중복하지 않는 경로를 구성할 수 있음을 보이고, 그 결과를 이용하여 고장 지름을 분석한다.

전송할 메시지를 가진 원시 노드 s에서 목적 노드 d로의 라우팅은 두 노드의 비트 스트링을 Exclusive-OR한 결과의 비트 스트링 r에서 $|r_i$="1"$|$의 개수에 따라서 2가지 경우로 설정할 수 있다. 첫째, $|r_i$="1"$|$ > n이면 먼저 c-차원 에지를 경유하고, r_i="0"를 갖는 모든 차원 에지를 한번씩 지나는 경로이고, 경로의 최대 길이는 $|r_i$="0"$|$+1이므로 n 이하이다($2 \leq i \leq 2n$). 둘째, $|r_i$="1"$| \leq n$이면 r_i="1"인 차원 에지를 모두 지나는 경로이고, 경로의 최대 길이는 r_i="1"을 갖는 차원 에지의 개수이므로 n 이하이다($2 \leq i \leq 2n$).

본 논문에서 라우팅을 위한 차원 에지의 순차적인 시퀀스에서 p개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하는 것은 차원 에지 시퀀스에서 가장좌측부터 순차적으로 p개의 차원 에지가 제거되고, 그리고 제거된 p개의 차원 에지가 시퀀스의 후미에 순차적으로 첨가되는 것을 의미한다. 예를 들어 차원 에지의 순차적인 시퀀스 $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$에서 2개의 차원 에지(p_1, p_2)를 왼쪽으로 순환하여 구성된 차원 에지 시퀀스는 $p_3, ..., p_n, p_1, p_2$이다. 노드 s에서 d로의 경로는 노드 s의 비트 스트링에 차원 에지 시퀀스를 연속적으로 경유하여 구성된 에지를 의미한다. 알고리즘 parallel_path의 전체적인 흐름을 정리하고 각 단계에 대한 세부적인 증명은 다음에 설명한다.

알고리즘 parallel_path에서 사용하는 수식은 다음과 같다.

s_b^d: 노드 s에 인접한 차원 에지이고, 그리고 r_i="b"를 갖는 차원 에지($b \in \{0,1\}$)를 크기 증가 순서로 나열한것중 d번째 위치에 있는 차원에지.

$\bar{s}_b^d$: 노드 s에 인접하지 않은 차원 에지이고, 그리고 r_i="b"를 갖는 차원 에지($b \in \{0,1\}$)를 크기 증가 순서로 나열한것중 d번째 위치에 있는 차원에지.

path_p_i: 노드 s에서 d로의 병렬 경로 설정을 위한 기본 경로.

parallel_path(j): 경로 path_p_i로부터 생성한 노드 s에서 d로의 새로운 경로.

Algorithm Parallel_Path

Input: Binary degit of source node $s(s_1,s_2,\ldots,s_{2n})$ and destination node $d(d_1,d_2,\ldots,d_{2n})$

Output: The number of n+1 node disjoint parallel path from node s to node d

Begin

```
r(r1,r2,...,r2n)= s(s1,s2,...,s2n) ⊕ d(d1,d2,...,d2n) /* 심벌 ⊕는 Exclusive- OR */
for i=1 to 2n do
begin
 if (|ri="1"| > n) then
        if (s1≠d1) then
        begin
            path_p1 = c-차원 에지, s^1_0, d^1_0, s^2_0, d^2_0,..., s^((n-2)/2)_0, d^((n-2)/2)_0
            for j=1 to k do    /*  k=|ri="0"| / 2  */
              parallel_path(j)는 path_p1의 차원 에지 시퀀스에서 2j-1개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여
              생성한 차원 에지 시퀀스.
            path_p2=  s^1_1, r^1_1, s^2_1, r^2_1,..., r^(n-k-1)_1, s^(n-k)_1
            for j=1 to n-k do  /* n-k개의 경로를 설정 */
              parallel_path(j)는 path_p2의 차원 에지 시퀀스에서 2j개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여
              생성한 차원 에지 시퀀스. 이때 순환된 2j( s^i_1, r^i_1)개의 차원 에지가 시퀀스의 후미에 첨가
              될 때는 r^i_1, s^i_1로 첨가된다.
        endif
        else   /* 노드 s와 d에서 s1=d1인 경우 */
        begin
            path_p1 = c-차원 에지, s^1_0, s̄^1_0, s^2_0, s̄^2_0,..., s^n_0
            path_p2 =  s^1_0, s̄^1_0, s^2_0, s̄^2_0,..., s^n_0, c-차원 에지
            for j=1 to k do
              parallel_path(j)는 path_p2의 차원 에지 시퀀스에서 2j개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여
              생성한 차원 에지 시퀀스.
            path_p3= s^1_1, d^1_1, s^2_1, d^2_1,..., s^(n-k)_1, d^(n-k)_1
            for j=1 to n-k do
              parallel_path(j)는 path_p3의 차원 에지 시퀀스에서 2j개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여
              생성한 차원 에지 시퀀스.
     endelse
 if (|ri="1"| = n) then
        if (s1≠d1) then
        begin
```

path_p_1= $s_1^1, \bar{s}_1^1, s_1^2, \bar{s}_1^2, \ldots, s_1^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}, \bar{s}_1^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}, s_1^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

for j=1 to k do /* $k=\lceil n/2 \rceil$ */

parallel_path(j)는 path_p_1의 차원 에지 시퀀스에서 $2j$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 생성한 차원 에지 시퀀스.

path_p_2 = $s_0^1, d_0^1, s_0^2, d_0^2, \ldots, d_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, s_0^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, c-차원에지

for j=1 to k do /* $k=\lfloor n/2 \rfloor$ */

parallel_path(j)는 path_p_2의 차원 에지 시퀀스에서 $2j$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 생성한 차원 에지 시퀀스.

endbegin

else /* 노드 s와 d에서 $s_1=d_1$인 경우 */

begin

path_p_1= $s_1^1, d_1^1, s_1^2, d_1^2, \ldots, s_1^{\frac{n}{2}}, d_1^{\frac{n}{2}}$

for j=1 to k do /* $k=n/2$ */

parallel_path(j)는 path_p_1의 차원 에지 시퀀스에서 $2j$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 생성한 차원 에지 시퀀스.

path_p_2 = $s_0^1, \bar{s}_0^1, s_0^2, \bar{s}_0^2, \ldots, s_0^{\frac{n}{2}-1}, \bar{s}_0^{\frac{n}{2}-1}, s_0^{\frac{n}{2}}$, c-차원에지

/* s_0^i($\bar{s}_0^i$)는 r_i="0"를 갖는 차원에지 i에 대하여

오름차순(즉, $s_0^i > s_0^j$, for $i > j$) */

for j=1 to k do /* $k=n/2$ */

parallel_path(j)는 path_p_2의 차원 에지 시퀀스에서 $2j$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 생성한 차원 에지 시퀀스. 이때 순환된 $2j$($s_0^i, \bar{s}_0^i$)개의 차원 에지가 시퀀스의 후미에 첨가 될 때는 $\bar{s}_0^i$, s_0^i 순서로 첨가한다.

endelse

if ($|r_i$="1"$|$ < n) then

if ($s_1 \neq d_1$) then

begin

path_p_1= $s_1^1, \bar{s}_1^1, s_1^2, \bar{s}_1^2, \ldots, s_1^v, \bar{s}_1^v, s_1^u$

/* $|r_i$="1"$|$=p, $2 \le i \le 2n$, $u=v+1$, $p=2v+1$ */

for j=1 to u do

parallel_path(j)는 path_p_1의 차원 에지 시퀀스에서 $2j$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 생성한 차원 에지 시퀀스.

path_p_2 = $s_0^1, d_0^1, s_0^2, d_0^2, \ldots, s_0^{n-u}, d_0^{n-u}$, c-차원에지

/* s_0^i(d_0^i)는 노드 $s(d)$에 인접한 n개 차원 에지에서 r_i="1"을 갖는 u개의 차원 에지를 제외한 나머지 $n-u$개 차원 에지 */

for j=1 to $n-u$ do

parallel_path(j)는 path_p_2의 차원 에지 시퀀스에서 $2j$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 생성한 차원 에지 시퀀스.

```
endbegin
else   /* 노드 s와 d에서 s1=d1인 경우 */
begin
    path_p1= s_1^1, d_1^1, s_1^2, d_1^2,..., s_1^{p/2}, d_1^{p/2}
          /* |ri="1"|=p, 2≤i≤2n  */
    for j=1 to p/2 do
      parallel_path(j)는 path_p1의 차원 에지 시퀀스에서 2j개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여
      생성한 차원 에지 시퀀스.
    path_p2 = s_0^1, s̄_0^1, s_0^2, s̄_0^2,..., s̄_0^{n-p/2-1}, s_0^{n-p/2}, c-차원에지
    for j=1 to n-p/2 do
      parallel_path(j)는 path_p2의 차원 에지 시퀀스에서 2j개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여
      생성한 차원 에지 시퀀스. 이때 순환된 2j( s_0^i, s̄_0^i)개의 차원 에지가 c-차원에지 다음에 첨
      가 될 때는 s̄_0^i, s_0^i 순서로 첨가한다.
endelse
  endfor
End Algorithm Parallel_Path
```

예를 들어 $FHS(6,3)$의 두 노드 s(=000111)에서 d(=011100)로 위의 알고리즘에 의하여 4개의 병렬 경로를 구성하는 과정을 보인다.

r(011011) = s(000111) ⊕ d(011100)으로, r_i="1"의 개수는 4이므로 n(=3)보다 크다. 또한 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링이 $s_1=d_1$="0"이다. 노드 s에 인접한 차원 에지={4,5,6}, 노드 d에 인접한 차원 에지={2,3,4}, r_i="1"을 갖는 차원 에지={2,3,5,6}, r_i="0"을 갖는 차원 에지={4}, r_i="0"을 갖고, 노드 s에 인접한 차원 에지를 크기 증가 순으로 갖는 s_0^1=**{4}**이고, r_i="0"을 갖고, 노드 s에 인접하지 않은 차원 에지를 갖는 $\bar{s}_0^i$=**∅**이다.

① path_p_1= c-차원 에지, s_0^1이므로, path_p_1= c-차원 에지, 4-차원에지이다. 즉, 노드 s에 c-차원 에지와 4-차원에지를 적용하면 노드 d의 비트 스트링을 생성함을 알 수 있다.

$$s=0001111 \xrightarrow{c} 11000 \xrightarrow{4} 011100=d$$

② path_p_1= s_0^1, c-차원 에지이므로, path_p_1=4, c-차원 에지이다. 즉, 노드 s에 4-차원과 c-차원 에지를 적용하면 노드 d의 비트 스트링을 생성함을 알 수 있다.

$$s=000111 \xrightarrow{4} 100011 \xrightarrow{c} 011100=d$$

r_i="1"을 갖고, 노드 s에 인접한 차원 에지를 크기 증가 순으로 갖는 s_1^1=**{5}** s_1^2=**{6}**이고,

r_i="1"을 갖고, 노드 d에 인접한 차원 에지를 크기 증가 순으로 갖는 d_1^1=**{2}** d_1^2=**{3}**이다.

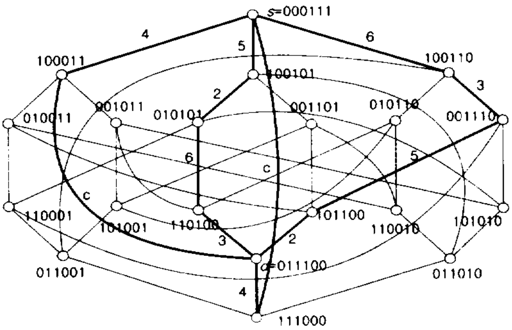
③ path_p_2= s_1^1, d_1^1, s_1^2, d_1^2이므로, path_p_2의 차원 에지 시퀀스는 5,2,6,3이다. 즉, 노드 s에 5-차원에지, 2-차원에지, 6-차원에지, 3-차원에지를 적용하면 노드 d의 비트 스트링을 생성함을 알 수 있다.

$$s=000111 \xrightarrow{5} 100101 \xrightarrow{2} 010101 \xrightarrow{6} 110100 \xrightarrow{3} 011100=d$$

④ path_p_2= s_1^1, d_1^1, s_1^2, d_1^2의 에지 시퀀스에서 2개의 차원에지 s_1^1, d_1^1를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로 path_p_2= s_1^2, d_1^2, s_1^1, d_1^1이다. 즉, 노드 s에 6-차원에지, 3-차원에지, 5-차원에지, 2-차원에지를 적용하면 노드 d의 비트 스트링을 생성함을 알 수 있다.

$$s=000111 \xrightarrow{6} 100110 \xrightarrow{3} 001110 \xrightarrow{5} 101100 \xrightarrow{2} 011100=d$$

(그림 3)에서 두 노드 s(=000111)에서 d(=011100)로 위의 알고리즘에 의하여 구성된 4개의 병렬 경로를 보인다.



(그림 3) *FHS*(6,3)에서 노드 000111에서 011100으로의 병렬 경로 예

본 논문에서 제안한 알고리즘 Parallel_Path의 병렬 경로의 길이와 개수는 아래의 보조정리와 정리에 의해 알 수 있다.

보조정리 1 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 노드의 첫 번째 비트가 서로 동일한 노드 s에서 d로의 최단 경로상의 에지 순서를 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{2k-1}$이라 할 때, 경로상의 가장 좌측 $2i$개의 에지를 왼쪽으로 순환하여 k-1개 경로를 구성할 수 있고, 그리고 경로상의 어떤 노드도 서로 중복되지 않는다($1 \le k \le n$, $1 \le i \le k-1$).

증명 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$은 이분할 그래프이고, $2n$개의 비트에서 "0"과 "1"의 개수는 각각 n개씩이다. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 노드에서 첫 번째 비트 스트링이 동일한 노드 s와 d를 Exclusive-OR한 결과 비트 스트링에서 r_i="0"와 r_i="1"을 갖는 개수는 짝수임을 알 수 있다($1 \le i \le 2n$). 비트 스트링 r에서 r_i="1"을 갖는 것은 노드 s와 d의 비트 스트링에서 i번째 위치의 비트가 서로 보수관계임을 의미하므로, 노드 s에서 d로의 최단 경로 라우팅은 r_i="1"을 갖는 위치의 비트를 한번씩만 라우팅 하는 경로이다. 노드 s에서 d로의 최단 경로상의 라우팅에서 r_i="1"을 갖는 위치의 에지들은 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{2k-1}$임을 알 수 있다. 또한 r_i="1"을 갖는 에지들은 모두가 서로 다른 위치의 비트들이므로 어떤 순서로 r_i="1"을 갖는 에지들을 경유하더라도 노드 s의 비트 스트링을 d의 비트 스트링으로 변환이 가능하다. 따라서 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{2k-1}$에서 앞에서부터 $2i$개의 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 k-1개 경로는 경로상의 어떤 노드도 서로 중복되지 않는다.

보조정리 2 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 노드의 첫 번째 비트가 동일한 노드 s와 d가 있을 때, 노드 v에서 w로의 최단 경로상의 에지 순서가 c-에지, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{2k-1}$이라 하자. 최단 경로상의 에지에서 $2i$-1개의 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 k개의 라우팅 경로 $p_{2i}, p_{2i+1}, p_{2i+2}, \ldots, p_{2k-1}, c$-에지, $p_2, p_1, \ldots, p_{2i-2}, p_{2i-3}, p_{2i-1}$상의 어떤 노드도 서로 중복하지 않는다. 이때 k개의 경로에서 왼쪽으로 순환한 에지 p_{2i-1}, p_{2i}가 c-에지 다음에 위치할 때는 p_{2i}, p_{2i-1} 순서로 교환하여 위치한다($1 \le i \le k$).

증명 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 $|r_i$="1"$| > n$인 경우 라우팅 알고리즘[18]에 의해 노드 s에서 d로의 최단 경로상의 에지는 c-에지와 r_i="0"를 갖는 위치의 차원 에지를 모두 경유하는 경로이다. 라우팅 경로에서 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링이 동일하므로 r_1="0"이고, 그리고 노드의 전체 비트 스트링의 개수는 짝수를 갖기 때문에 r_i="0"를 갖는 비트의 개수는 항상 홀수개이다. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 c-에지는 비트 스트링이 보수 관계인 노드를 연결하는 에지이므로 Exclusive-OR 성질에 의해 r_i="0"를 갖는 차원 에지를 모두 라우팅 해야만 r_i="1"을 갖는 차원 에지를 모두 라우팅 한 것과 동일하게 된다. c-에지와 r_i="0"를 갖는 차원 에지를 라우팅 할 때 왼쪽으로 순환하는 $2i$-1개의 에지에서 c-에지 다음에 위치하는 p_{2i-1}, p_{2i}의 순서가 p_{2i}, p_{2i-1}로 교환되는 것은 c-에지를 한번 경유하면 첫 번째 비트 스트링이 보수인 노드로 바뀌기 때문이다. 최단 경로상의 에지가 c-에지를 포함하여 $2k$개이므로 최대 k개의 경로를 구성할 수 있고, 경로상의 노드가 중복하지 않음을 알 수 있다.

정리 1 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 노드 중복하지 않는 n+1개 병렬 경로에서 병렬경로의 최대 길이는 $2n$-1이다.

증명 증명은 노드 s와 d의 비트 스트링을 Exclusive-OR한 결과 비트 스트링 r에서 r_i="1"의 개수가 n보다 큰 경우, n인 경우, 그리고 n보다 작은 경우로 나누고, 각 경우에서 노드 s와 d의 비트 스트링 조건에 따라 $s_1 \neq d_1$인 경우, $s_1 = d_1$인 경우로 나눈다. 그리고 각 경우에서 n+1개의 병렬 경로는

r_i="1"을 갖는 개수에 따라 지름 길이를 갖는 경로와 지름 길이보다 더 큰 경로로 나누어 분석한다.

첫째, $|r_i=\text{"1"}| > n$ 경우

경우 1. 노드 s와 d의 비트 스트링에서 $s_1 \neq d_1$일 때

경우 1.1 지름 길이를 갖는 k+1개의 병렬 경로

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 r_i="0"를 갖는 차원 에지는 없거나 또는 짝수개만 존재한다. r_i="0"를 갖는 차원 에지가 없는 경우는 노드 s와 d가 서로 보수관계인 경우이고, 짝수개인 경우 노드 s와 d에 인접한 n개의 차원 에지에서 $|r_i=\text{"0"}|/2$개의 차원 에지는 r_i="0"를 갖는 차원 에지와 동일하다. 노드 s에 인접한 차원 에지에서 r_i="0"를 갖는 차원 에지를 $s_1, s_2, \ldots, s_{(n-2)/2}$-차원 에지라 하고, 노드 d에 인접한 차원 에지에서 r_i="0"를 갖는 차원 에지를 $d_1, d_2, \ldots, d_{(n-2)/2}$-차원 에지라 하자.

r_i="1"을 갖는 개수가 n보다 많을 때, 라우팅 알고리즘[9]에 의한 경로는 노드 s에서 먼저 c-차원에지를 경유하고, 그리고 r_i="0"을 갖는 모든 위치를 한번씩 경유하는 경로이다 즉, c-차원 에지, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $s_{(n-2)/2}$-차원 에지, $d_{(n-2)/2}$-차원 에지 순서로 라우팅 한다(s_i-차원 에지$\neq d_i$-차원 에지). 따라서 지름 경로를 갖는 경로의 길이는 $|r_i=\text{"0"}|+1$이고, 이러한 지름 길이를 갖는 병렬 경로의 개수는 k+1이다($k=|r_i=\text{"0"}|/2$). 여기서 $|r_i=\text{"0"}|/2$인 k의 의미는 노드 s(또는 d)에 인접한 차원 에지에서 r_i="0"를 갖는 위치의 차원 에지 개수와 동일하다.

k+1개의 병렬 경로를 구성하는 방법은 다음과 같다. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 k번째 경로는 위의 라우팅 알고리즘에 의한 경로에서 앞에서부터 $2k$-1개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성된 순서를 갖는다. 첫 번째 병렬 경로는 라우팅 알고리즘 경로에서 첫 번째 에지인 c-에지를 경로상의 가장 뒤에 위치하도록 하는 경로 s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $s_{(n-2)/2}$-차원 에지, $d_{(n-2)/2}$-차원 에지, c-에지 순서를 갖는다. 두 번째 병렬 경로는 라우팅 알고리즘 경로에서 앞에서부터 3개의 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로로써 s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $s_{(n-2)/2}$-차원 에지, $d_{(n-2)/2}$-차원 에지, c-에지, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지 순서를 갖는 방식으로 k개의 병렬 경로를 구성할 수 있다. 따라서 라우팅 알고리즘에 의한 한가지 경로와 k개의 경로를 통하여 k+1개의 병렬 경로를 구성할 수 있으며, 이러한 병렬 경로상의 노드가 중복하지 않음은 보조정리 1에 의해 알 수 있다.

경우 1.2 지름보다 큰 길이를 갖는 n-k개의 병렬 경로

경우 1.1에서 r_i="0"을 갖는 $i(2 \leq i \leq 2n)$의 개수는 $2k$이므로, 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1이 서로 보수관계이면 r_i="1"을 갖는 $i(2 \leq i \leq 2n)$의 개수는 $2n-(2k+1)$으로 항상 홀수개이다. 만약 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1이 동일하면 r_i="1"을 갖는 $i(2 \leq i \leq 2n)$의 개수는 $2n-2k$로 짝수개이다.

r_i="1"을 갖는 $i(2 \leq i \leq 2n)$의 개수가 $2n-(2k+1)$으로 항상 홀수개일 때, 노드 s에 인접한 n개의 차원 에지에서 r_i="0"을 갖는 k개의 차원 에지를 제거하면 n-k개의 차원 에지가 남게된다. 이러한 n-k개의 차원 에지 즉, $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_j, \ldots, s_{n-k}$-차원 에지는 노드 d에서도 인접한 차원 에지로 존재한다($s_i < s_j$). 왜냐하면 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1이 서로 보수이므로 비트 스트링에서 r_i="0"을 갖는 동일한 위치에 있는 비트는 서로 보수여야 하기 때문이다. 또한 r_i="1"을 갖는 차원 에지에서 노드 s에 인접한 n-k개의 차원 에지를 제거하고 남은 차원 에지 즉, $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_j, \ldots, r_{n-k-1}$-차원 에지는 n-k-1개이고, 차원 에지 s_i와 r_i는 서로 다른 차원 에지이다($2 \leq i \leq 2n$). 이러한 n-k개의 병렬 경로는 r_i="1"을 갖는 i-차원 에지를 이용하여 구성한 기본 경로를 통해 생성할 수 있다($2 \leq i \leq 2n$). 노드 s에 인접한 n-k개의 차원 에지와 r_i="1"을 갖는 차원 에지에서 s에 인접하지 않은 n-k-1개의 차원 에지를 한번씩 교대로 지나는 경로를 구성한다 즉, $s_1, r_1, s_2, r_2, \ldots, r_{n-k-1}, s_{n-k}$-차원 에지 순서를 갖는 기본 경로이다. 이러한 경로에서 홀수 번째 있는 차원 에지는 노드 s에 인접한 차원 에지이고, 짝수 번째 있는 차원 에지는 노드 s에 인접하지 않은 차원 에지이다. n-k개 병렬 경로에서 k번째 병렬 경로는 위의 기본 경로에서 $2k$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로이다. 왼쪽으로 순환한 차원 에지 s_i와 r_i를 경로의 뒷부분에 첨가 할 때는 s_i와 r_i의 순서를 교환한 r_i와 s_i 순서를 갖도록 구성한다. 경로상의 홀수 번째 차원 에지는 노드 s에 인접한 차원 에지로 구성되어야만 목적 노드에 도달할 수 있다. 예를 들어 첫 번째 병렬 경로는 위의 기본 경로에서 첫 번째 2개의 차원 에지 s_1과 r_1을 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로로써 s_2-차원 에

지, r_2-차원 에지, ..., r_{n-k-1}-차원 에지, s_{n-k}-차원 에지, r_1-차원 에지, s_1-차원 에지 순서로 구성된다. 이와 같은 방법으로 구성할 수 있는 경로 개수는 $n-k$개이고, $n-k$개 병렬 경로의 길이는 r_i="1"을 갖는 차원 에지의 최대 개수 즉, $2n-1$을 갖는다.

경우 2. 노드 s와 d의 비트 스트링에서 $s_1=d_1$일 때

경우 2.1 지름 길이를 갖는 $k+1$개의 병렬 경로

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 r_i="0"을 갖는 모든 위치의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지를 $s_1,s_2,...,s_u$-차원 에지라 하고, 노드 s에 인접하지 않은 차원 에지를 $\bar{s}_1, \bar{s}_2, ..., \bar{s}_v$-차원 에지라 하자($2 \le i \le 2n$). r_i="1"을 갖는 개수가 n보다 클 때의 라우팅 알고리즘에 의한 경로는 노드 s에서 먼저 c-에지를 경유하고, 그리고 r_i="0"을 갖는 모든 위치의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지와 인접하지 않은 차원 에지를 교대로 지나는 즉, c-에지, s_1-차원 에지, $\bar{s}_1$-차원 에지, s_2-차원 에지, $\bar{s}_2$-차원 에지, ..., s_u-차원 에지를 경로로 구성한다($2 \le i \le 2n$). 따라서 지름 경로를 갖는 경로의 길이는 $|r_i$="0"$|+1$이고, 이러한 지름 길이를 갖는 병렬 경로의 개수는 $k+1$이다($k=\lceil |r_i$="0"$|/2 \rceil$). 여기서 $\lceil |r_i$="0"$|/2 \rceil$인 k의 의미는 노드 s(또는 d)에 인접한 차원 에지에서 r_i="0"를 갖는 위치의 차원 에지와 공통된 차원 에지 개수와 동일하다.

$k+1$개의 병렬 경로는 라우팅 알고리즘에 의해 구성된 경로를 이용한다. 첫 번째 병렬 경로는 지름 길이를 갖는 위의 경로에서 첫 번째 에지인 c-에지만 왼쪽으로 순환하여 구성된 차원 에지를 경로로 갖는다 즉, s_1-차원 에지, $\bar{s}_1$-차원 에지, s_2-차원 에지, $\bar{s}_2$-차원 에지, ..., s_u-차원 에지, c-에지 순서로 라우팅 하는 경로이다. 이러한 경로를 편의상 기본 경로라하자. 첫 번째 병렬 경로에서 홀수 번째에 위치하는 차원 에지는 모두 노드 s에 인접한 차원 에지이다. 이제 k개의 병렬 경로를 구성하는 과정을 알아보자. k개의 병렬 경로에서 i번째 병렬 경로는 위의 기본 경로의 차원 에지 시퀀스에서 앞에서부터 $2i$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로이다. 이 경로에서 왼쪽으로 순환하는 $2i$개의 차원 에지 s_i와 $\bar{s}_i$-차원 에지가 경로상의 c-에지 뒷부분으로 이동 할 때는 s_i와 $\bar{s}_i$-차원 에지의 순서를 바꾸어 $\bar{s}_i$와 s_i-차원 에지 순서를 유지하도록 한다. 예를 들어 k개 병렬 경로중 첫 번째 경로는 s_2-차원 에지, $\bar{s}_2$-차원 에지, ..., s_u-차원 에지, c-에지, $\bar{s}_1$-차원 에지, s_1-차원 에지 순서를 갖는다. 이러한 $k+1$개의 병렬 경로가 노드 중복하지 않음은 보조정리 2에 의해 알 수 있다.

경우 2.2 지름보다 큰 길이를 갖는 $n-k$개의 병렬 경로

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1이 동일하면 r_i="1"을 갖는 위치의 개수는 $2(n-k)$로 항상 짝수개 이고, 노드 s(또는 d)에 인접한 차원 에지에서 r_i="1"을 갖는 차원 에지와 중복된 차원 에지의 개수는 $n-k$로 항상 홀수개이다. 이러한 $n-k$개의 병렬 경로는 아래의 기본 경로를 이용하여 구성할 수 있다. 기본 경로의 구성은 r_i="1"을 갖는 $2(n-k)$개의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 $n-k$개의 차원 에지를 크기가 증가하는 차원 에지 순서 $s_1,s_2,...,s_{n-k}$-차원 에지로 나열하고, 그리고 노드 d에 인접한 $n-k$개의 차원 에지를 크기가 증가하는 차원 에지 순서 $d_1,d_2,...,d_{n-k}$-차원 에지로 나열한 후에 노드 s에 인접한 차원 에지와 노드 d에 인접한 차원 에지를 첫 번째 차원 에지부터 $n-k$번째 차원 에지 까지 교대로 경유하는 경로를 구성한다 즉, $s_1,d_1,s_2,d_2,...,s_{n-k},d_{n-k}$-차원 에지 순서를 갖는 경로이다($s_i \neq d_i$). $n-k$개의 병렬 경로에서 j번째 경로는 위의 기본 경로에서 앞에서부터 $2j$개의 차원 에지 s_i와 d_i-차원 에지를 한 단위로 하여 j개를 왼쪽으로 순환하여 구성한 순서를 갖도록 구성한다. 예를 들어 $n-k$개의 병렬 경로에서 첫 번째 경로는 위의 기본 경로에서 2개의 차원 에지 s_1과 d_1을 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로 $s_2,d_2,...,s_{n-k},d_{n-k},s_1,d_1$-차원 에지로 구성된다. 이와 같은 방법으로 구성할 수 있는 경로 개수는 $n-k$개임을 쉽게 알 수 있다. 이러한 $n-k$개 병렬 경로의 길이는 r_i="1"을 갖는 차원 에지의 최대 개수 즉, $2n-2$의 경로길이를 갖는다.

둘째, $|r_i$="1"$| = n$ 경우

이 경우 $n+1$개 병렬 경로의 길이는 지름과 동일한 길이 n을 갖는다. 단 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1의 조건에 따라 경로를 구성하는 방법만 다르다.

경우 1. 노드 s와 d의 비트 스트링에서 $s_1 \neq d_1$일 때

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1이 서로 보수관계이므로 r_i="0"을 갖는 개수가 n일 때, r_i="1"을 갖는 개

수는 n-1개이다($2\le i\le 2n$). r_i="1"을 갖는 n-1개 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지의 개수는 $\lceil n/2\rceil$이다. r_i="1"을 갖는 n-1개의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지를 크기가 증가하는 순서로 즉, $s_1,s_2,\ldots,s_{\lceil n/2\rceil}$-차원 에지를 갖고, 노드 s에 인접하지 않는 $\lceil n/2\rceil$-1개의 차원 에지를 크기가 증가하는 순서로 즉, $s^*_1,s^*_2,\ldots,s^*_{\lceil n/2\rceil-1}$-차원 에지를 갖는다고 하자. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 r_i="1"을 갖는 개수가 n일 때, 라우팅 알고리즘에 의한 라우팅 경로는 노드 s에서 r_i="1"을 갖는 모든 차원 에지를 한번씩 경유하는 경로이다 즉, s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지, s_2-차원 에지, s^*_2-차원 에지, ..., s_i-차원 에지, s^*_i-차원 에지, ..., $s_{\lceil n/2\rceil}$-차원 에지를 순서로 갖는다. n+1개의 병렬 경로에서 $\lceil n/2\rceil$개의 경로는 라우팅 알고리즘에 의한 경로에서 구성할 수 있다. $\lceil n/2\rceil$개의 병렬 경로에서 k번째 경로는 라우팅 알고리즘에 의해 구성된 경로에서 앞에서부터 $2k$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로이다($1\le k\le\lceil n/2\rceil$). 예를 들어 두번째 병렬 경로는 s_3-차원 에지, s^*_3-차원 에지, s_4-차원 에지, s^*_4-차원 에지, ..., s_i-차원 에지, s^*_i-차원 에지, ..., $s_{\lceil n/2\rceil}$-차원 에지, s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지, s_2-차원 에지, s^*_2-차원 에지를 순서로 갖는다. 이와 같은 방법으로 $\lceil n/2\rceil$개의 경로를 구성할 수 있으며, 경로 길이는 지름 길이인 n임을 쉽게 알 수 있다. 왜냐하면 라우팅 알고리즘에 의해 구성된 경로에서 노드 s에 인접한 차원 에지의 개수는 $\lceil n/2\rceil$개이기 때문이다.

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 r_i="0"을 갖는 차원 에지의 개수는 r_i="1"을 갖는 차원 에지의 개수보다 한 개 많으므로, r_i="0"을 갖는 모든 위치의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 $\lfloor n/2\rfloor$개 차원 에지를 $s_1,s_2,\ldots,s_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지라 하고, 노드 d에 인접한 $\lfloor n/2\rfloor$개 차원 에지를 $d_1,d_2,\ldots,d_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지라 하자. $\lfloor n/2\rfloor$+1개의 경로는 r_i="0"을 갖는 차원 에지와 c-에지에 의해 구성한 다음의 기본 경로에서 구성할 수 있다. 기본 경로는 먼저 c-에지를 경유하고, 그리고 r_i="0"을 갖는 차원 에지들에서 노드 s에 인접한 차원 에지와 노드 d에 인접한 차원 에지를 교대로 경유하는 경로 즉, c-에지, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $d_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지, $s_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지 순서이다. $\lfloor n/2\rfloor$+1개의 병렬 경로중 첫 번째 경로는 위의 기본 경로에서 첫 번째 에지인 c-에지만 왼쪽으로 순환하여 구성된 순서를 경로로 갖는다 즉, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $d_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지, $s_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지, c-에지 순서이다. 위의 첫 번째 병렬 경로에서 홀수 번째에 위치하는 차원 에지는 모두 노드 s에 인접한 차원 에지이다. $\lfloor n/2\rfloor$개의 병렬 경로중 k번째 병렬 경로는 위의 첫 번째 병렬 경로에서 앞에서부터 $2k$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로이다. 예를 들어 $\lfloor n/2\rfloor$개의 병렬 경로 중 첫 번째 경로는 s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $d_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지, $s_{\lfloor n/2\rfloor}$-차원 에지, c-에지, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지 순서이다($1\le k\le\lfloor n/2\rfloor$). 이러한 $\lfloor n/2\rfloor$+1개의 병렬 경로는 길이가 n이고, 노드 중복하지 않음은 보조정리 1에 의해 알 수 있다.

경우 2. 노드 s와 d의 비트 스트링에서 s_1=d_1일 때

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 n이 홀수인 경우는 r_i="1"을 갖는 개수가 n개인 경우는 존재하지 않으므로 n이 짝수인 경우를 고려한다. r_i="1"을 갖는 n개의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지를 크기가 증가하는 순서를 갖도록 구성한 차원 에지를 $s_1,s_2,\ldots,s_{n/2}$-차원 에지라 하고, 노드 d에 인접한 차원 에지를 크기가 증가하는 순서로 갖도록한 차원 에지를 $d_1,d_2,\ldots,d_{n/2}$-차원 에지라 하자. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 라우팅 알고리즘에 의한 경로는 r_i="1"을 갖는 n개의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지와 노드 d에 인접한 차원 에지를 교대로 경유하는 경로이다. 즉, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $s_{n/2}$-차원 에지, $d_{n/2}$-차원 에지 순서를 갖는 경로이다. $n/2$개의 병렬 경로는 위의 라우팅 알고리즘에 의한 경로를 이용하여 구성한다. 라우팅 알고리즘을 이용한 $n/2$개의 병렬 경로에서 k번째 병렬 경로는 라우팅 경로상의 차원 에지에서 앞에서부터 $2k$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 경로의 가장 뒷부분에 첨가하여 구성한 경로 즉, s_{k+1}-차원 에지, d_{k+1}-차원 에지, s_{k+2}-차원 에지, d_{k+2}-차원 에지, ..., $s_{n/2}$-차원 에지, $d_{n/2}$-차원 에지, ..., s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, ..., s_k-차원 에지, d_k-차원 에지 순서를 갖는 경로이다. 노드 s에 인접한 차원 에지의 개수가 $n/2$개이므로 $n/2$개의 병렬 경로를 구성할 수 있음은 쉽게 알 수 있으며, 각 경로상의 노드들이 서로 중복하지 않음은 보조정리 1에 의해 알 수 있다. $n/2$개의 병렬 경로 길이는 r_i="1"을 갖는 개수이므로 n임을 알 수 있다.

$n/2+1$개의 병렬 경로는 r_i="0"을 갖는 차원 에지와 c-차원 에지를 이용하여 구성할 수 있다. 이 경우에서 r_i="0",($2 \leq i \leq 2n$)을 갖는 차원 에지는 항상 $2k+1$로 홀수개이고, 노드 s와 d에 인접한 n개의 차원 에지에서 k개의 차원 에지는 노드 s와 d에서 동시에 인접한 차원 에지로써, k에 속한 차원 에지는 노드 s와 d에서 r_i="0"을 갖는 차원 에지이다($0 \leq k \leq n/2$). r_i="0"을 갖는 차원 에지들중 노드 s와 d에서 공통으로 인접한 차원 에지를 $s_1, s_2, ..., s_{n/2}$-차원 에지라 하고, 그리고 노드 s와 d에서 공통으로 인접하지 않은 차원 에지를 $s^*_1, s^*_2, ..., s^*_{n/2-1}$-차원 에지라 하자.

$n/2+1$개의 병렬 경로는 다음의 기본 경로를 이용하여 구성할 수 있다. 먼저 c-에지를 경유하고, 그리고 r_i="0"을 갖는 차원 에지들중 노드 s와 d에서 공통으로 인접한 차원 에지와 인접하지 않은 차원 에지를 교대로 경유하는 경로이다 즉, c-에지, s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지, s_2-차원 에지, s^*_2-차원 에지, ..., $s^*_{n/2-1}$-차원 에지, $s_{n/2}$-차원 에지를 순서로 갖는다. 위의 기본 경로를 이용한 병렬 경로에서 첫 번째 경로는 c-에지를 경로상의 가장 뒤로 이동하여 경유하는 경로 s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지, s_2-차원 에지, s^*_2-차원 에지, ..., $s^*_{n/2-1}$-차원 에지, $s_{n/2}$-차원 에지, c-에지 순서를 갖는다. 첫 번째 경로에서 홀수 번째 위치한 차원 에지는 모두 노드 s에 인접한 차원 에지이다. $n/2$개의 병렬 경로에서 k번째 병렬 경로는 위의 첫 번째 경로에서 앞에서부터 $2k$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 경로상의 가장 뒷부분으로 이동하여 구성한 경로이다. 단, 왼쪽으로 순환한 s_i와 s^*_i-차원 에지가 c-에지 보다 뒤에 위치하는 모든 경우에서는 순서를 바꾸어 s^*_i와 s_i-차원 에지 순서를 갖도록 한다. 즉, s_{k+1}-차원 에지, s^*_{k+1}-차원 에지, s_{k+2}-차원 에지, s^*_{k+2}-차원 에지, ..., $s_{n/2}$-차원 에지, $s^*_{n/2-1}$-차원 에지, c-에지, s^*_1-차원 에지, s_1-차원 에지, ..., s^*_k-차원 에지, s_k-차원 에지를 순서로 갖는다($0 \leq k \leq n/2$). 이러한 $n/2+1$개의 병렬 경로가 노드 중복하지 않음은 보조정리 2에 의해 알 수 있으며 경로의 길이는 r_i="0"을 갖는 차원 에지의 최대수 + 1이므로 최대 n을 갖는다.

셋째, $|r_i$="1"$| < n$ 경우

경우 1. 노드 s와 d의 비트 스트링에서 $s_1 \neq d_1$일 때

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 노드 s와 d의 첫 번째 비트 스트링 s_1과 d_1이 서로 보수관계일 때, r_i="1"을 갖는 개수를 p라 할 때 p는 항상 홀수이고, r_i="0"을 갖는 개수는 짝수이다. r_i="1"을 갖는 p개의 차원 에지에서 노드 s에 인접한 u개의 차원 에지를 크기가 증가하는 순서 즉, $s_1, s_2, ..., s_u$-차원 에지라 하고, 그리고 r_i="1"을 갖고 노드 s에 인접하지 않는 v개의 차원 에지를 크기가 증가하는 순서로 즉, $s^*_1, s^*_2, ..., s^*_v$-차원 에지를 갖는다고 하자($|r_i$="1"$|=p$, $u=v+1$). Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 라우팅 알고리즘에 의한 라우팅 경로는 r_i="1"을 갖는 p개의 차원 에지를 모두 경유하는 경로 s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지, s_2-차원 에지, s^*_2-차원 에지, ..., s^*_v-차원 에지, s_u-차원 에지 순서를 갖는다. u개의 병렬 경로에서 지름 길이를 갖는 경로는 라우팅 알고리즘에 의해 설정된 경로를 이용하여 구성할 수 있다. u개의 병렬 경로에서 k번째 경로는 라우팅 알고리즘에 의한 경로에서 앞에서부터 $2k$개의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 경로의 가장 뒷부분으로 이동하여 구성한 경로이다. 이때, 왼쪽으로 순환하는 s_i와 s^*_i-차원 에지를 하나의 단위로 하여 뒷부분으로 이동하여 구성 할 때는 두 개의 차원 에지를 교환하여 s^*_i와 s_i-차원 에지 순서를 갖도록 한다 즉, s_{k+1}-차원 에지, s^*_{k+1}-차원 에지, s_{k+2}-차원 에지, s^*_{k+2}-차원 에지, ..., s^*_v-차원 에지, s_u-차원 에지, s^*_1-차원 에지, s_1-차원 에지, ..., s^*_k-차원 에지, s_k-차원 에지 순서를 갖는다. u개의 병렬 경로 길이는 r_i="1"을 갖는 차원 에지의 개수와 동일하므로 최대 길이는 n이하이다.

$n-u+1$개의 병렬 경로는 r_i="0"를 갖는 차원 에지와 c-에지를 이용하여 구성할 수 있다. 노드 s에 인접한 n개의 차원 에지에서 r_i="1"를 갖는 u개의 차원 에지를 제외한 나머지 $n-u$개의 차원 에지를 $s'_1, s'_2, ..., s'_{n-u}$-차원 에지라 하고, 노드 d에 인접한 n개의 차원 에지에서 r_i="1"를 갖는 u개의 차원 에지를 제외한 나머지 $n-u$개의 차원 에지를 $d'_1, d'_2, ..., d'_{n-u}$-차원 에지라 하자 ($s'_j \neq d'_j$-차원 에지). r_i="0"를 갖는 차원 에지와 c-에지를 이용한 기본 경로는 c-에지, s'_1-차원 에지, d'_1-차원 에지, ..., s'_{n-u}-차원 에지, d'_{n-u}-차원 에지 순서를 갖는다. 첫 번째 병렬 경로는 c-에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한 경로 s'_1-차원 에지, d'_1-차원 에지, ..., s'_{n-u}-차원 에지, d'_{n-u}-차원 에지, c-에지 순서를 갖는다. $n-u$개의 병렬 경로에서 k번째 병렬 경로는 위의 첫 번째 병렬 경로에서 앞에서부터 $2k$의 차원 에지를 왼쪽으로 순환하여 구성한다.

경우 2. 노드 s와 d의 비트 스트링에서 $s_1=d_1$일 때

Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$에서 r_i="1"을 갖는 개수를 p라 할 때, p는 항상 짝수이고, r_i="0"를 갖는 개수는 홀수개이다($2 \le i \le 2n$). 따라서 r_i="1"을 갖는 p개의 차원 에지에서 노드 s와 d에 인접한 차원 에지는 각각 $p/2$개씩임을 알 수 있다. 노드 s에 인접한 차원 에지에서 $p/2$개에 속한 차원 에지를 $s_1,s_2,...,s_{p/2}$-차원 에지라 하고, 노드 d에 인접한 차원 에지에서 $p/2$개에 속한 차원 에지를 $d_1,d_2,...,d_{p/2}$-차원 에지라 하자. $p/2$개의 병렬경로는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 라우팅 알고리즘을 이용하여 구성할 수 있다. 알고리즘에 의한 라우팅 경로는 s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_2-차원 에지, d_2-차원 에지, ..., $s_{p/2}$-차원 에지, $d_{p/2}$-차원 에지 순서를 갖는 경로이다. $p/2$개의 병렬 경로에서 k번째 병렬 경로는 위의 라우팅 알고리즘에 의한 경로에서 앞에서부터 $2k$개의 차원에지를 왼쪽으로 순환하여 경로의 가장 뒷부분으로 이동하여 구성한 경로로써 s_{k+1}-차원 에지, d_{k+1}-차원 에지, s_{k+2}-차원 에지, d_{k+2}-차원 에지,...,$s_{p/2}$-차원 에지, $d_{p/2}$-차원 에지, s_1-차원 에지, d_1-차원 에지, s_k-차원 에지, d_k-차원 에지 순서를 갖는 경로이다($1 \le k \le p/2$). $p/2$개 병렬 경로 길이는 r_i="1"을 갖는 최대 개수와 같으므로 최대 길이는 n이하이다.

$n-(p/2)+1$개의 병렬 경로는 r_i="0"을 갖는 차원 에지와 c-에지로 구성된 다음의 기본 경로를 이용하여 구성할 수 있다. r_i="0"을 갖는 차원 에지에서 노드 s에 인접한 차원 에지를 $s_1,s_2,...,s_{n-p/2}$-차원 에지라 하고, 노드 s에 인접하지 않은 차원 에지를 $s^*_1,s^*_2,...,s^*_{k-1}$-차원 에지라 하자($j=n-(p/2)$). 기본 경로는 c-에지, s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지,...,s^*_{j-1}-차원 에지, s_j-차원 에지 순서를 갖는다. 첫 번째 경로는 위의 기본 경로에서 c-에지를 경로상의 가장 뒷부분으로 이동하여 구성한 경로 s_1-차원 에지, s^*_1-차원 에지,...,s_j-차원 에지, s^*_{j-1}-차원 에지, c-에지 순서를 갖는 경로이다. $n-(p/2)$개 병렬 경로중 k번째 경로는 위의 첫 번째 경로에서 앞에서부터 $2k$개의 차원 에지를 경로상의 뒷부분으로 이동하여 구성한 경로이다. 이때 왼쪽으로 순환하는 s_i와 s^*_i-차원 에지가 c-에지 다음에 위치하는 모든 경우에 s^*_i와 s_i-차원 에지 순서를 유지하도록 한다. 예를 들어 k번째 경로는 s_{k+1}-차원 에지, s^*_{k+1}-차원 에지, ..., s^*_{j-1}-차원 에지, s_j-차원 에지, c-에지, s^*_1-차원 에지, s_1-차원 에지, ..., s^*_k-차원 에지, s_k-차원 에지 순서를 갖는 경로이다($j=n-(p/2)$). 이러한 $n-(p/2)+1$개의 경로 길이는 r_i="0"를 갖는 차원 에지의 개수+1이므로 최대 길이는 $2n-1$이다.

따라서 위의 각 경우에 의해 $n+1$개의 노드 중복하지 않는 병렬 경로를 구성할 수 있으며, 병렬 경로의 최대 길이는 $|r_i="1"|<n$인 경우에서 노드 s와 d의 비트 스트링이 $s_1=d_1$일 때 $2n-1$임을 알 수 있다.

따름정리 2 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 고장 지름은 $2n-1$이다.

증명 상호 연결망의 고장 지름은 고장이 발생한 노드가 최대 그 연결망의 분지수-1개 이하의 노드가 고장이 발생했을 때 그 연결망의 지름을 의미한다. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 분지수는 $n+1$이므로 최대 고장 가능한 노드의 개수는 n개이다. 따라서 임의의 두 노드 s와 d 사이에 $n+1$개의 노드 중복하지 않는 병렬 경로를 구성하고, 그리고 병렬 경로의 길이를 분석하면 최대 n개의 노드가 고장이 발생해도 적어도 한 개 경로는 노드 s에서 노드 d로 라우팅 할 수 있으므로, $n+1$개의 병렬 경로에서 최대 길이가 그 연결망의 고장 지름임을 알 수 있다. 따라서 정리 1의 결과에 의해 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 고장 지름은 $2n-1$이다.

따름정리 3 정규 연결망을 갖는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$은 weakly resilient하다.

증명 상호 연결망 G의 지름이 $dia(G)$일 때, 연결망 G의 고장 지름이 $f_G \le c*dia(G)$으로 표현되면 상호 연결망 G는 weakly resilient하다는 사실이 알려져 있다[1,5]. Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$의 지름은 n이고, 고장 지름은 위의 따름정리 2에 의해 $2n-1$이므로 정규 연결망으로 표현되는 Folded 하이퍼-스타 그래프 $FHS(2n,n)$은 weakly resilient임을 알 수 있다.

4. 결 론

병렬 처리를 위한 병렬 컴퓨터 구조의 기반이 되는 상호 연결망은 전체 시스템의 성능과 확장성에 있어서 중요한 의미를 갖는다. 이러한 상호 연결망에서 임의의 두 노드간의 병렬 경로는 대량의 메시지를 전송할

때 메시지를 여러 개의 패킷으로 분할하여 병렬 경로를 이용하여 동시에 전송할 수 있으므로 전송 시간을 단축할 수 있고, 경로 상에 존재하는 노드나 에지가 고장이 발생했을 때 대체 경로를 구성할 수 있으므로 상호 연결망에서 중요한 의미를 갖는다. 하이퍼큐브의 망 비용을 개선한 Folded 하이퍼-스타 그래프 *FHS*(2*n*,*n*)은 간단한 라우팅 알고리즘을 갖고, 하이퍼큐브와 메쉬 구조를 Folded 하이퍼-스타 그래프 *FHS*(2*n*,*n*)에 연장율 2에 임베딩 하는 상호 연결망으로 하이퍼큐브와 메쉬 구조에서 개발된 알고리즘들을 적은 비용으로 시뮬레이션 할 수 있는 상호 연결망이다.

본 논문에서는 Folded 하이퍼-스타 그래프 *FHS*(2*n*,*n*)에서 노드 중복하지 않는 *n*+1개의 병렬 경로(node disjoint parallel path)를 임의의 두 노드의 비트 스트링을 Exclusive-OR한 결과 비트 스트링에서 "1"의 개수와 *n*과의 관계를 이용하여 세 가지 경우로 분석하고, 각 경우에 대하여 임의의 두 노드의 첫 번째 비트 스트링이 같은 값을 갖는지의 여부에 따라 경우로 나누어 병렬 경로를 구성하는 방법을 제시하였다. Folded 하이퍼-스타 그래프 *FHS*(2*n*,*n*)의 *n*+1개의 병렬 경로 중 최대 길이는 2*n*-1임을 보였고, 이 결과를 이용하여 *FHS*(2*n*,*n*)의 고장 지름이 2*n*-1임을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The Star Graph : An Attractive Alternative to the n-Cube," Proc. Int'l. Conf. on Parallel Processing, pp.393-400, Aug. 1987.

[2] M. S. Chen, K. G. Shin and D. D. Kandlur, "Addressing, Routing and Broadcasting in Hexagonal Mesh Multiprocessors," IEEE Trans. Comput., Vol.39, No.1, pp.10-18, Jan. 1990.

[3] K. Efe, "A Variation on the Hypercube with Lower Diameter," IEEE Trans. Comput., Vol.40, No.11, pp.1312-1316, 1991.

[4] M. S. Krishnamoorthy and B. Krinamurthy, "Fault Diameter of Interconnection Networks," Comput. Math. Appl. 13, pp.577-582, 1987.

[5] M. R. Samatham and D. K. Pradhan, "The de Bruijn Multiprocessor Network : A Versatile Parallel-Processing and Sorting Network for VLSI," IEEE Trans. Comput., Vol.38, pp.567-581, 1989.

[6] Ivan Stojmenovic, "Honeycomb Networks : Topological Properties and Communication Algorithms," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.8, No.10, pp.1036-1042, October 1997.

[7] S. Latifi, "Combinatorial Analysis of the Fault-Diameter of the *n*-cube," IEEE Trans. Comput., Vol.42, No.1, pp.27-33, Jan. 1993.

[8] S. Latifi, "On the fault-diameter of the star graph," Information Processing Letters, Vol.46, No.3, pp.143-150, June 1993.

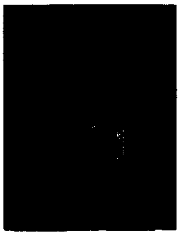
[9] 이형옥, 김병철, 임형석, "하이퍼-스타 그래프 : 다중 컴퓨터를 위한 새로운 상호 연결망", 정보처리학회 논문지 5권 12호, pp.3099-3108, 1998.

이 형 옥

e-mail : u9698133@chonnam.chonnam.ac.kr
1994년 순천대학교 전산학과 졸업(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과 졸업(석사)
1996년~1997년 순천대학교 컴퓨터교육과 조교
1999년 전남대학교 전산학과(이학박사)
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 그래프이론, 상호연결망, 계산이론

최 정

e-mail : choi@kns.kujeon-c.ac.kr
1989년 전남대학교 전산학과(이학사)
1991년 전남대학교 전산학과(이학석사)
1999년 전남대학교 전산학과(이학박사)
1997년~현재 기전여자대학 전임강사
관심분야 : 계산이론, 알고리즘, 병렬 및 분산처리



박 승 배

e-mail : sbpark@www.chodang.ac.kr

1989년 전남대학교 전산학과(이학사)

1992년 전남대학교 전산학과(이학석사)

1996년 전남대학교 전산학과(이학박사)

1996년~현재 초당대학교 컴퓨터과학과 전임강사

관심분야 : 암호이론, 계산이론

조 정 호

e-mail : chcho@hosim.kwangju.ac.kr

1984년 전남대학교 전산학과(이학사)

1987년 전남대학교 전산학과(이학석사)

1996년 전남대학교 전산학과(이학박사)

1987년~1988년 삼보컴퓨터 소프트웨어연구부

1988년~1997년한국전자통신연구소 이동통신기술연구부 선임연구원

1997년~현재 광주대학교 컴퓨터전자통신공학부 조교수

관심분야 : 이동멀티미디어통신, 광대역 WLL, 프로토콜 설계 및 검증, 그래프이론

임 형 석

e-mail : hslim@chonnam.chonnam.ac.kr

1983년 서울대학교 컴퓨터공학과 졸업(학사)

1985년 한국과학기술원 전산학과 졸업(석사)

1993년 한국과학기술원 전산학과 졸업(박사)

현재 전남대학교 전산학과 부교수

관심분야 : 그래프이론, 암호이론, 병렬 및 분산처리