DOI: 10.3745/KIPSTA.2008.15-A.6.345

하이퍼스타 연결망 *HS(2n,n)*의 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리

김 종 석[†] · 김 성 원[††] · 이 형 옥[†††]

요 약

최근에 병렬처리를 위한 새로운 위상으로 하이퍼 스타 연결망 *HS(2n,n)*가 제안되었다. 하이퍼 스타 연결망은 하이퍼큐브와 스타 그래프의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용이 우수한 연결망이다. 본 논문에서는 하이퍼스타 연결망 *HS(2n,n)*에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 알고리즘을 제안한다. 그리고 제안한 알고리즘에 의해 구성된 에지 중복 없는 스패닝 트리가 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리임을 증명한다.

키워드 : 상호연결망, 하이퍼스타 연결망, 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리

Optimal Edge-Disjoint Spanning Trees in HyperStar Interconnection Network *HS(2n,n)*

Kim Jongseok[†] · Kim Sung Won[††] · Lee Hyeongok[†††]

ABSTRACT

Recently, a HyperStar network *HS(2n,n)* has been introduced as a new interconnection network of new topology for parallel processing. HyperStar network has properties of hypercube and star graph, further improve the network cost of a hypercube with the same number of nodes. In this paper, we show a construction algorithm of edge-disjoint spanning trees in HyperStar network *HS(2n,n)*. Also, we prove that edge-disjoint spanning tree by the algorithm is optimal.

Keywords : Interconnection Network, HyperStar Interconnection Network, Optimal Edge-Disjoint Spanning Tree

1. 서 론

현대의 공학과 과학 기술의 발달, 특히 VLSI 기술과 광섬유(optic fiber) 기술의 발달로 인해 고성능 컴퓨터에 대한 요구 증가로 병렬 처리 컴퓨터에 대한 관심이 증가하고 있다. 병렬 처리 컴퓨터는 크게 다중 프로세서(multi-processor) 시스템과 다중 컴퓨터(multi-computer) 시스템으로 나눌 수 있다. 다중 컴퓨터 시스템은 자신의 메모리를 갖는 프로세서들을 상호 연결망으로 연결하고 프로세서들 사이에 통신은 상호 연결망을 통해 메시지를 교환하는 방식으로 이루어진다. 이러한 다중 컴퓨터에서 각 프로세서를 연결하는 상호 연결망 구조는 전체 시스템의 성능 및 확장성에 큰 영향을 미치는 것으로 병렬 처리 컴퓨터 개발의 기반 기술 제공을 위해 그 필요성이 증가되고 있다.

상호연결망은 각 프로세서들을 노드로, 프로세서들 사이에 통신 채널을 에지로 표현한다. 상호연결망을 구성하는 요소 즉, 프로세서(processor)와 통신 링크(link)들이 증가하면서 구성 요소들의 고장 가능성은 더욱더 높아지고 있으므로 대규모 연결망일수록 높은 고장 허용도를 필요로 하며, 연결망의 일부분에서 고장이 발생해도 전체 성능을 유지할 수 있는 방안들이 요구된다. 특히 상호연결망에서는 프로세서와 프로세서 간에 메시지 전송을 위한 라우팅 알고리즘과 최단 경로 길이에 의해 성능이 결정된다.

본 논문에서는 상호연결망 하이퍼스타 *HS*(2*n*,*n*)에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 방법을 제안한다. 하이퍼스타 연결망은 하이퍼큐브와 스타 그래프의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용(network cost)이 우수하고, 차원이 증가함에 따라 노드수가 급격하게 증가하는 스타 그래프의 단점을 개선한 연결망이다. 하이퍼스타 *HS*(2*n*,*n*)은 간단한 라우팅 알고리즘과 최대

† 정 회 원 : 영남대학교 전자정보공학부 연구교수
†† 정 회 원 : 영남대학교 전자정보공학부 조교수
††† 종신회원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수(교신저자)
논문접수 : 2008년 9월 19일
심사완료 : 2008년 10월 23일

고장허용도와 유용한 확장성을 가지고 있으며, 연결도, 대칭성, 방송, 고장 지름, 이분할 에지수, 임베딩 등이 분석되었다[1,2,6,7,10-12].

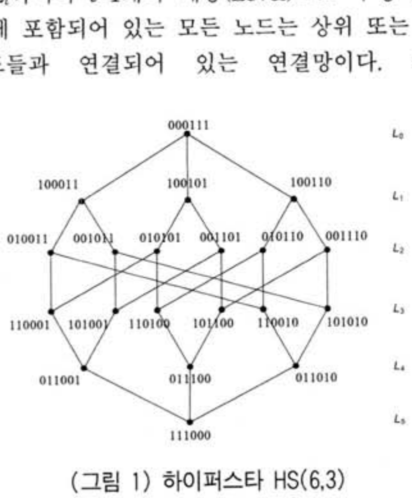
둘 이상의 스패닝 트리 내부에 동일한 방향성 에지가 중복 사용되지 않을 때, 그 스패닝 트리를 에지 중복 없는 스패닝 트리(edge-disjoint spanning trees)라 한다. 상호연결망에서 에지 중복 없는 스패닝 트리에 관한 연구들이 [3-5,8,9]에서 발표되었다. 상호연결망에서 에지 중복 없는 스패닝 트리는 연결망의 두 가지 성능 분석을 위해 주로 사용된다. 첫째, 상호연결망의 고장허용도의 성능 향상을 위해서이고 둘째, 상호연결망의 효율적인 방송 기법을 분석하기 위해서 사용된다. 상호연결망에서 만들어진 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 에지들은 모두 방향성 에지들이다.

논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 하이퍼스타 $HS(2n,n)$의 성질에 대해 알아보고, 3장에서는 $HS(2n,n)$에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 방법을 보이며, 마지막으로 결론을 맺도록 하겠다.

2. 관련 연구

하이퍼스타 $HS(2n,n)$는 $\binom{2n}{n}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드의 주소는 이진수 0과 1로 구성된 $2n$개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_{2n}$으로 표현되며($1 \le i \le 2n$), 0과 1의 개수는 각각 n개이다. 노드를 연결하는 에지 관계는 비트스트링의 심벌 b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $V=\sigma_i(U)$인 두 노드 $U=b_1b_2...b_i...b_{2n}$와 $V=b_ib_2...b_1...b_{2n}$사이에 에지가 발생하며, 노드 U와 V를 연결하는 에지를 i-에지라고 한다. 하이퍼스타 $HS(2n,n)$는 간단한 라우팅 알고리즘과 유용한 확장성을 가지고 있고, 이분할 연결망이며 연결도, 노드 대칭성, 최대 고장 허용도, 임베딩에 관한 연구결과가 있다[1,2,6,7,10-12]. 본 논문에서는 $HS(2n,n)$의 0과 1의 개수가 각각 n개인 임의의 노드 U=0...01...1를 간단히 0^n1^n로 표시하겠다.

계층 연결망은 노드를 계층적으로 위치 시켰을 때, 계층 L_0부터 L_t까지의 t+1개의 계층(Level)으로 구성되어 있으며 각 계층에 포함되어 있는 모든 노드는 상위 또는 하위 계층의 노드들과 연결되어 있는 연결망이다. 하이퍼스타 $HS(2n,n)$는 L_0부터 L_{2n-1}까지의 $2n$개의 계층을 갖는 계층 연결망으로 나타낼 수 있다. (그림 1)은 하이퍼스타 $HS(6,3)$을 계층 연결망으로 표현한 예제이다.



(그림 1) 하이퍼스타 HS(6,3)

$HS(2n,n)$의 임의의 노드 U에서 치환 $\sigma_{k1},\sigma_{k2},...,\sigma_{ki},...,\sigma_{kt}$을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $[k_1,k_2,...,k_i,...,k_t]$로 표시하겠다. 그러면 $HS(2n,n)$의 에지 발생 조건에 의해 k_i는 i-에지를 나타낸다는 것을 알 수 있다. $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 $U=a_1a_2...a_i...a_{2n}$와 $V=b_1b_2...b_i...b_{2n}$이라 할 때, 두 노드 U와 V 사이에 Exclusive-OR(XOR) 함수를 적용한 결과를 $R=r_1r_2...r_i...r_{2n}$ 이라 하자. 두 노드 U와 V를 연결하는 최단경로를 $P=[k_1,k_2,...,k_j,...,k_t]$라고 하면, $k_j=\{i|r_i=1,\ 2 \le i \le 2n\}$이다. 왜냐하면 임의의 두 노드 U와 V의 첫 번째 비트스트링이 보수 관계에 있고, 나머지 비트스트링에 Exclusive-OR 함수를 적용시켰을 때 $r_i=1(2 \le i \le 2n)$인 비트가 한 개 이상이 존재하는 경우 i-에지가 발생하므로 r_i=1인 비트의 위치 즉, i 값에 따라 경로를 구성하면 최단경로 P가 구성됨을 알 수 있다. 이와 관련된 내용은 [7]에서 제안한 최단경로 라우팅 알고리즘을 나타낸다. r_1은 첫 번째 비트스트링이 보수 관계에 있는지 아닌지를 나타내므로 경로 구성에는 영향을 미치지 않는다. 또한 최단경로 P는 경로 P를 구성하는 i들 중에 홀수 위치에 있는 i들의 순서 또는 짝수 위치에 있는 i들의 순서에 상관없이 구성될 수 있다. 예를 들어, 노드 U=000111이고 V=110100이라고 하면 R=110011이고, r_i=1인 i들의 집합={1,2,5,6}이므로 최단경로 P를 구성하는 i는 {2,5,6}이다. 그러므로 최단경로 P는 [5,2,6] 혹은 [6,2,5]이다. 이러한 성질을 다음과 같이 정리할 수 있다.

성질 1 $HS(2n,n)$의 노드 u를 0^n1^n이라고 하고, u를 출발 노드로 하는 두 개의 경로 $P=[k_1,k_2,...,k_i,...,k_t]$와 $Q=[h_1,h_2,...,h_i,...,h_t]$가 있다고 하자($1 \le i \le t$). 만약 홀수 k_i들과 홀수 h_i들이 순서에 상관없이 서로 같고, 짝수 k_i들과 짝수 h_i들이 순서에 상관없이 서로 같으면 경로 P와 경로 Q에 의해 도착하는 노드는 동일하다.

보조정리 1 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이는 6이다 [2,11].

보조정리 2 $HS(2n,n)$의 두 노드를 $U=0^n1^n$와 V라고 하고, U와 V를 연결하는 최단경로를 P라고 하고, P를 구성하는 에지들을 로테이트한 경로를 Q라 하자. P와 Q의 길이를 l($\ge$3)라고 하면, P와 Q를 연결하면 길이 $2l$인 짝수 사이클이 구성된다.

증명 보조정리 1에 의해 P의 최소 길이는 3임을 알 수 있다. $HS(2n,n)$의 각 노드는 이진 비트스트링으로 구성되어 있고, 각 경로는 치환 σ_i을 연속으로 나열함으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 그러므로 만약 임의의 에지 i가 경로 P에 속해 있다면, 에지 i는 경로 Q에도 속해 있어야만 한다. 두 경로 P와 Q에 공통 노드 $W(\neq U,V)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 경로 P를 구성하고 있는 에지들 중 U로부터 W를 연결하는 에지들과 경로 Q를 구성하고 있는 에지들 중 U로부터 W를 연결하는 에지들은 같아야만 한다. 그러나 이

러한 에지들은 같을 수가 없다. 왜냐하면 P를 구성하는 에지들을 로테이트한 경로가 Q이기 때문이다. 두 경로 P와 Q 사이에는 공통 노드 $W(\neq U,V)$가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있으므로 두 경로 P와 Q는 노드 중복 없는 경로이고, 두 경로를 연결하면 길이 $2l$인 짝수 사이클이 구성된다.

3. 에지 중복 없는 스패닝 트리

하이퍼스타 $HS(2n,n)$ 내부의 임의의 두 노드를 $U=0^n1^n$와 $V=b_1b_2...b_i...b_{2n}$라고 하고, 두 노드 사이에 XOR 함수를 적용한 결과를 $R=r_1r_2...r_i...r_{2n}$이라고 하며, $dist(u,v)=\sum_{i=2}^{2n} r_i (r_i=1)$ $=t$라고 하자. $r_i=1$인 i들의 집합 R^1을 다음과 같은 두 시퀀스로 구성하겠다. $2\leq i\leq n$이면, $H_1=<i_0,i_1,...,i_g>$이고, $n+1\leq i\leq 2n$이면, $H_2=<i_{g+1},i_{g+2},...,i_{t-1}>$이라고 하고, $i_0<i_1<...<i_g<...<i_{t-1}$이다. t가 홀수이면 $g=\frac{t-1}{2}$이고, t가 짝수이면 $g=\frac{t}{2}$이다. 또한, $r_i=0$인 i들의 집합을 시퀀스 $R^0=<i_0,i_1,...,i_f>$라고 하겠다 $(2\leq i\leq n,\ i_0<i_1<...<i_f)$. $CR_x(S)$는 시퀀스 S의 구성 요소를 왼쪽으로 로테이트(rotate)한 시퀀스이고, x는 S의 구성 요소를 로테이트한 횟수를 나타낸다. 예를 들어, $S=<1,2,...,n>$이면, $CR_0(S)=<1,2,...,n>$이고, $CR_3(S)=<4,5,...,n,1,2,3>$이다. 본 논문에서는 홀수를 od, 짝수를 ev로 표현하겠다.

하이퍼스타 $HS(2n,n)$ 내부의 임의의 두 노드 U와 V를 연결하는 경로를 P라고 하자. 경로 P를 구성하는 원소들 중에 홀수 위치에 있는 원소들을 $S_1=(a_1,a_2,...,a_p)$이라고 나타내고, 짝수 위치에 있는 원소들을 $S_2=(b_1,b_2,...,b_q)$라고 나타내겠다 $(p=q)$. S_1과 S_2의 원소들은 교환 순서($\circledast$)를 구성한다. 예를 들면, $S_1=\{5,6,7\}$, $S_2=\{2,3,4\}$라고 하면 $S_1\circledast S_2=\{5,2,6,3,7,4\}$이다.

하이퍼스타 $HS(2n,n)$의 에지 중복 없는 스패닝 트리들을 다음과 같이 구성하겠다. $HS(2n,n)$은 노드 대칭[1,9]이므로, 에지 중복 없는 스패닝 트리들의 정점을 $U=0^n1^n(\subset L_0)$라고 하겠다. 그러면 노드 U의 자식 노드 $ch(U)(\subset L_1)$는 α-에지에 의해 노드 U와 연결된다. 에지 중복 없는 스패닝 트리를 T_α라고 표현 하겠다$(n+1\leq\alpha\leq 2n)$. T_α의 정점 노드 U는 오직 하나의 자식 노드 $ch(U)$만을 갖는다. 노드 U와 V사이에 XOR 함수를 적용한 결과에 따라 세 가지 경우로 나누어 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하겠다. 노드 V의 부모 노드 $pa(V)$를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

경우 1) $\alpha\subset H_2$인 경우: 두 노드 U와 V사이의 경로는 $CR_x(H_2)$ $\circledast CR_x(H_1)$에 의해 구성되고, $x=\alpha-n-1$이다.
$CR_x(H_2)=<s_{g+1},s_{g+2},...,s_{t-1}>$라고하고, $CR_x(H_1)=<s_0,s_1,...,s_g>$하고 하면, t가 홀수인 경우에는 $CR_x(H_2)\circledast CR_x(H_1)=<s_{g+1},s_0,s_{g+2},s_1,...,s_g,s_{t-1}>$이고, t가 짝수인 경우에는 $CR_x(H_2)\circledast CR_x(H_1)=<s_{g+1},s_0,s_{g+2},s_1,...,s_{t-1},s_g>$이며, $CR_x(H_2)$의 첫 번 째 원소 s_{g+1}는 α이다. 그러므로 노드 V의 부모 노드 $pa(V)$는 t가 홀수이면, $\sigma_{s_{t-1}}(V)$이고, t가 짝수이면, $\sigma_{s_g}(V)$이다.

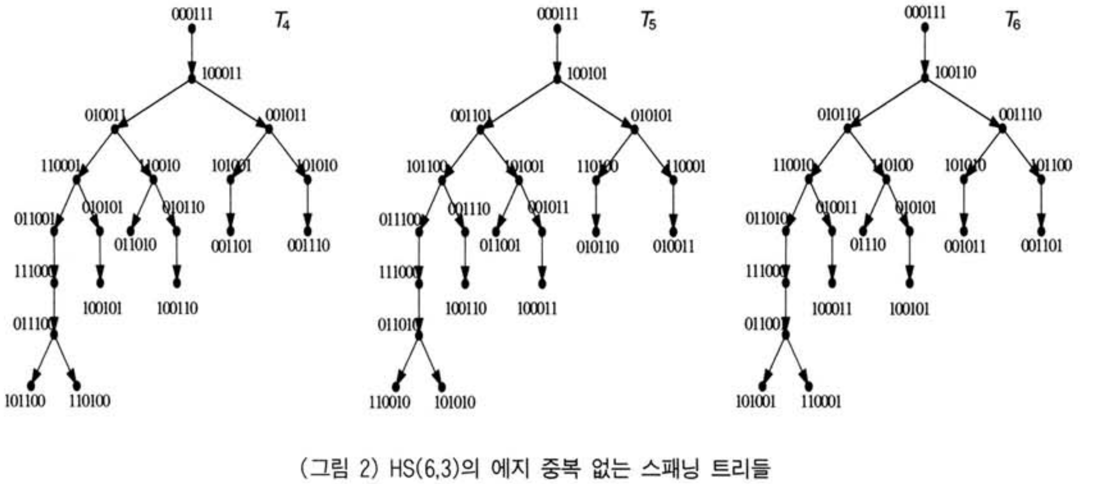
예를 들면, $HS(6,3)$의 두 노드를 $U=000111$, $V=011001$라고 하고, $\alpha=4$라고 하자. 그러면, $t=4$, $R^1=\{2,3,4,5\}$, $H_1=<2,3>$, $H_2=<4,5>$이고, $x=\alpha-n-1=4-3-1=0$이다. 그러므로 $CR_x(H_2)=<4,5>$이고, $CR_x(H_1)=<2,3>$임을 알 수 있고, $CR_x(H_2)$ $\circledast CR_x(H_1)=<4,2,5,3>$임을 알 수 있으므로, $pa(011001)=\sigma_3$ $(011001)=110001$이다.

경우 2) $\alpha\not\subset H_2$이고 $V\subset L_{ev}$인 경우: 노드 V의 부모 노드 $pa(V)$는 $\sigma_\alpha(V)$이다.

예를 들면, $HS(6,3)$의 두 노드를 $U=000111$, $V=011100$라고 하고, $\alpha=4$라고 하자. 그러면, $t=4$, $R^1=\{2,3,5,6\}$, $H_1=<2,3>$, $H_2=<5,6>$이고, $\alpha(=4)\not\subset H_2$이며, $011100\subset L_{ev}(ev=4)$이다. 그러므로 $pa(011100)=\sigma_4(011100)=111000$이다

경우 3) $\alpha\not\subset H_2$이고 $V\subset L_{od}$인 경우: $CR_x(R^0)=<h_0,h_1,...h_j,...,h_{n-2}>$라고 하고, $x=\alpha-n-1$이다. 노드 V의 부모 노드 $pa(V)$는 $\sigma_{h_j}(V)$이다. 만약 노드 V와 노드 $pa(V)$를 연결하는 에지가 여러 개 존재하는 경우에는 가장 작은 j값을 갖는 h_j를 선택한다 $(0\leq j\leq n-2)$.

예를 들면, $HS(6,3)$의 두 노드를 $U=000111$, $V=101100$라고 하고, $\alpha=4$라고 하자. 그러면, $t=3$, $R^1=\{3,5,6\}$, $H_1=<3>$,



(그림 2) HS(6,3)의 에지 중복 없는 스패닝 트리들

H_2=<5,6>, R^0=<2>이고, $\alpha(=4)\not\subset H_2$이며, $101100 \subset L_{od}(od=3)$이다. 그러므로 $pa(101100)=\sigma_2(101100)=011100$이다.

알고리즘에 의해 구성되는 에지 중복 없는 스패닝 트리의 높이(height)는 $2n+1$이다.

정리 1. 노드 $U=0^n1^n$를 정점으로 하는 트리 T_α는 $HS(2n,n)$의 스패닝 트리이다($n+1 \le \alpha \le 2n$).

증명 트리 T_α를 구성하는 알고리즘에 사용된 노드들은 $HS(2n,n)$의 노드 U와 임의의 노드 V라고 했기 때문에 $HS(2n,n)$의 모든 노드는 트리 T_α를 구성하는 모든 노드임을 명확하게 알 수 있다. 트리 T_α이 $HS(2n,n)$의 스패닝 트리임을 보이기 위해 트리 T_α 내부에 사이클이 존재하지 않음을 보이겠다. $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 V, W라고 하고, $V \subset L_p$, $W \subset L_q$라고 하자. $HS(2n,n)$는 계층 그래프라고 했으므로, 만약 $p=q$이거나 $|p-q| \ge 2$이면 두 노드 사이에는 에지가 존재하지 않는다. 또한 $HS(2n,n)$가 계층 그래프이므로 그래프 내부에 사이클이 존재하기 위해서는 사이클을 구성하는 노드들 중 최소 하나의 노드는 둘 이상의 부모 노드를 가져야만 한다. 그런데 주어진 알고리즘을 보면 모든 노드는 하나의 부모 노드만을 갖는다는 것을 알 수 있다. 그러므로 노드 0^n1^n를 정점으로 하는 트리 T_α는 $HS(2n,n)$의 스패닝 트리이다.

정리 2. $HS(2n,n)$의 노드 $U=0^n1^n$를 정점으로 하는 스패닝 트리 T_β와 T_γ는 에지 중복 없는 스패닝 트리이다($n+1 \le \beta \ne \gamma \le 2n$).

증명 T_β와 T_γ는 스패닝 트리임을 정리 1에서 증명하였다. $HS(2n,n)$의 임의의 노드를 V라고 하자. 스패닝 트리 T_β 내부의 노드 U로부터 노드 V에 이르는 경로를 P라고 하고, 스패닝 트리 T_γ 내부의 노드 U로부터 노드 V에 이르는 경로를 Q라고 하자. 경로 P와 경로 Q를 연결하면 에지 중복 없는 사이클을 구성함을 보임으로 T_β와 T_γ는 에지 중복 없는 스패닝 트리임을 보이겠다. $HS(2n,n)$는 이분할 연결망이다[8]. 그러므로 $HS(2n,n)$의 내부에 존재하는 사이클은 짝수 길이만을 갖는다. 즉, 경로 Q의 길이=경로 P의 길이+홀수인 경우는 존재하지 않는다. 다음의 세 가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1) 경로 P와 경로 Q의 경로 길이가 같은 경우($\gamma \subset H_2$): 경로 P를 구성하는 에지들과 경로 Q를 구성하는 에지들은 성질 1에 의해 순서만 다르게 나열된 동일한 에지들임을 알 수 있다. 주어진 알고리즘에 의하면 각 경로는 $CR_x(H_2) \circledast CR_x(H_1)$에 의해 구성됨을 알 수 있으므로, 경로 Q는 경로 P를 왼쪽으로 x만큼 로테이트한 경로임을 알 수 있다. 보조정리 2에 의해 두 경로 상에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다.

경우 2) 경로 Q의 길이=경로 P의 길이+2인 경우($\gamma \not\subset H_2$, $V \subset L_{ev}$): 경로 Q를 구성하는 첫 번째 에지와 마지막 에지는 γ임을 주어진 알고리즘에 의해 알 수 있다. 그러므로 경로 Q를 $[\gamma,Q',\gamma]$라고 하자. 스패닝 트리 T_γ 내부의 노드 $pa(V)$는 주어진 알고리즘에 의해 노드 V와 γ-에지에 의해 연결되어 있다. 연결망 $HS(2n,n)$ 내부의 노드 V와 γ-에지에 의해 연결된 노드를 $ch(V)$라고 하자. 그러면 노드 $pa(V)$와 노드 $ch(V)$는 동일한 노드임을 알 수 있다. 노드 U로부터 노드 $pa(V)$에 이르는 경로 $[\gamma,Q']$를 구성하는 에지들과 노드 U로부터 노드 $ch(V)$에 이르는 경로 $[P,\gamma]$를 구성하는 에지들은 성질 1에 의해 순서만 다르게 나열된 동일한 에지들임을 알 수 있다. 즉, 경로 P와 경로 Q'를 구성하는 에지들은 나열된 순서만 다른 동일 에지들로 구성된 경로들임을 알 수 있다. 주어진 알고리즘에 의해 노드 U로부터 노드 $pa(V)(=ch(V))$에 이르는 경로 $[\gamma,Q']$와 경로 $[P,\gamma]$는 $CR_x(H_2) \circledast CR_x(H_1)$에 의해 구성됨을 알 수 있다. 즉, 경로 $[\gamma,Q']$는 경로 $[P,\gamma]$를 로테이트한 경로임을 알 수 있으므로 보조정리 2에 의해 경로 $[\gamma,Q']$와 경로 $[P,\gamma]$ 사이에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다. 그러므로 경로 P와 경로 Q사이에는 에지 중복이 존재하지 않는다.

경우 3) 경로 Q의 길이=경로 P의 길이+4인 경우($\gamma \not\subset H_2$, $V \subset L_{od}$): 알고리즘에 의해 경로 Q를 구성하는 첫 번째 에지와 두 번째 에지가 γ-에지와 s_0-에지임을 알 수 있고, 노드 V와 노드 $pa(V)$를 연결하는 에지는 h_j-에지이며, 노드 $pa(V)$와 노드 $pa(pa(V))$를 연결하는 에지는 γ-에지임을 알 수 있다. 그러므로 경로 Q를 $[\gamma,s_0,Q',\gamma,h_j]$라고 하자. 연결망 $HS(2n,n)$ 내부의 노드 V와 h_j-에지에 의해 연결된 노드를 $ch(V)$라고 하고, $ch(V)$와 γ-에지에 의해 연결된 노드를 $ch(ch(V))$라고 하자. 그러면 노드 $pa(pa(V))$와 노드 $ch(ch(V))$는 동일한 노드임을 알 수 있다. 노드 U로부터 노드 $pa(pa(V))$에 이르는 경로 $[\gamma,s_0,Q']$를 구성하는 에지들과 노드 U로부터 노드 $ch(ch(V))$에 이르는 경로 $[P,h_j,\gamma]$를 구성하는 에지들은 순서만 다르게 나열된 동일한 에지들임을 성질 1에 의해 알 수 있다. 주어진 알고리즘에 의해 노드 U로부터 노드 $pa(pa(V))(=ch(ch(V)))$에 이르는 경로 $[\gamma,s_0,Q']$와 경로 $[P,h_j,\gamma]$는 $CR_x(H_2) \circledast CR_x(H_1)$에 의해 구성됨을 알 수 있다. 즉, 경로 $[\gamma,s_0,Q']$는 경로 $[P,h_j,\gamma]$를 로테이트한 경로임을 알 수 있으므로 보조정리 2에 의해 경로 $[\gamma,s_0,Q']$와 경로 $[P,h_j,\gamma]$ 사이에는 에지 중복이 없다는 것을 알 수 있다. 그러므로 경로 P와 경로 Q사이에는 에지 중복이 존재하지 않는다.

이상의 증명에 의하여, T_β와 T_γ는 에지 중복 없는 스패닝 트리이다.

정리 3. 노드 $U=0^n1^n$를 정점으로 하는 스패닝 트리 T_α는 $HS(2n,n)$의 에지 중복 없는 최적(optimal) 스패닝 트리이다 ($n+1 \le \alpha \le 2n$).

증명 $HS(2n,n)$의 임의의 노드를 V라고 하고, 노드 U로부터 노드 V에 이르는 최단 경로를 $Q=dist(U,V)$라 하며, 스패닝 트리 T_α 내부의 노드 U로부터 노드 V에 이르는 경로를 P라고 하자. T_α를 구성하는 경로 P가 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하기 위한 최적 거리를 갖는다는 것을

보임으로 T_α가 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리임을 보이겠다. 세 가지 경우로 나누어 증명하겠다.

경우 1) $\alpha \subset H_2$인 경우: 알고리즘에 의해 노드 U로부터 노드 V에 이르는 경로 P의 거리=$dist(U,V)$ 이므로 경로 P가 최적 거리를 갖는다는 것을 쉽게 알 수 있다.

경우 2) $\alpha \not\subset H_2$이고 $V \subset L_{ev}$인 경우: 최단 거리 $dist(U,V)$를 구성하는 경로를 Q라고 하면, 경로 Q는 스패닝 트리 T_α 상에 존재하지 않는다. 왜냐하면 경로 Q 상에는 α-에지가 존재하지 않기 때문이다. 주어진 알고리즘에 의해 노드 V $(\subset L_{ev})$는 부모노드 $pa(V)(\subset L_{od})$와 α-에지에 의해 연결된다. $od=ev+1$이다. 왜냐하면, T_α는 트리이기 때문에 노드 V와 노드 $pa(V)$는 동일 계층에 존재할 수 없고, 만약 $od=ev-1$이면, 노드 $pa(V)$는 경로 Q 상에 존재하는 노드가 되기 때문이다. 노드 U로부터 노드 $pa(V)$까지의 경로를 P'라고 하면, 경로 P'는 경우 1에 의해 최적 거리를 갖는 경로임을 알 수 있다. 두 노드 U와 V 사이에 최단 거리 $dist(U,V)$를 갖는 경로 Q가 존재하지 않는 경우, P'의 거리+1=od+1(=$dist(U,V)$+2)를 갖는 경로 P는 최적임을 알 수 있다.

경우 3) $\alpha \not\subset H_2$이고 $V \subset L_{od}$인 경우: 최단 거리 $dist(U,V)$를 구성하는 경로를 Q라고 하면, 경로 Q는 스패닝 트리 T_α 상에 존재하지 않는다. 왜냐하면 경로 Q 상에는 α-에지가 존재하지 않기 때문이다. 주어진 알고리즘에 의해 노드 $V(\subset L_{od})$는 부모노드 $pa(V)(\subset L_{ev})$와 h_j-에지에 의해 연결된다. $ev=od+1$이다. 왜냐하면, T_α는 트리이기 때문에 노드 V와 노드 $pa(V)$는 동일 계층에 존재할 수 없고, 만약 $ev=od-1$이면, 노드 $pa(V)$는 경로 Q 상에 존재하는 노드가 되기 때문이다. 주어진 알고리즘에 의해 노드 $pa(V)(\subset L_{ev})$는 부모노드 $pa(pa(V))(\subset L_{od'})$와 α-에지에 의해 연결된다. $od'=ev+1$이고 최적거리임을 경우 2에 의해 알 수 있다. 노드 U로부터 노드 $pa(pa(V))$까지의 경로를 P'라고 하면, 경로 P'는 경우 1에 의해 최적 거리를 갖는 경로임을 알 수 있다. 두 노드 U와 V 사이에 최단 거리 $dist(U,V)$가 존재하지 않는 경우, P'의 거리 +2=od'+2(=$dist(U,V)$+4)를 갖는 경로 P는 최적임을 알 수 있다.

정리 1에 의해 T_α는 $HS(2n,n)$의 스패닝 트리임을 보였고, 세 가지 경우로 나누어 T_α에 존재하는 모든 경로 P가 최적 거리를 갖는다는 것을 보였으므로, T_α는 $HS(2n,n)$의 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리이다.

4. 결 론

본 논문에서는 상호연결망 $HS(2n,n)$에서 에지 중복 없는 스패닝 트리를 구성하는 알고리즘을 제시하였고, 알고리즘에 의해 구성된 에지 중복 없는 스패닝 트리가 최적 스패닝 트리임을 보였다. 제시한 알고리즘에 의해 상호연결망 $HS(2n,n)$의 하나의 노드가 분지수-1개의 에지가 고장이 발생해도 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리를 구성할 수 있다는 것을 알 수 있고, 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리에 의해 고장 에지를 갖는 하나의 노드로부터 상호연결망 $HS(2n,n)$의 다른 모든 노드로 에지 중복 없이 메시지를 전달할 수 있음을 알 수 있다.

상호연결망 $HS(2n,n)$이 에지 중복 없는 최적 스패닝 트리를 갖는다는 것은 고장허용도가 좋은 연결망임을 의미하고, 효율적인 방송 기법을 가지고 있다는 것을 나타낸다.

참 고 문 헌

[1] E. Cheng and L. Liptak, "Structural properties of hyper-stars," Ars Combinatoria, Vol.80, pp.65-73, 2006.

[2] E. Cheng and M. Shah, "A strong structural theorem for hyper-stars," Congressus Numerantium, Vol.179 pp.181-191, 2006.

[3] P. Fragopoulou and S.G. Akl, "Edge-disjoint spanning trees on the star network with applications to fault tolerance," IEEE Trans. Computers, Vol.45, No.2, pp.174-185, 1996.

[4] P. Fraigniaud and C.T. Ho, "Arc-disjoint spanning trees on the cube connected cycles network," Proc. International Conference on Parallel Processing, Vol.1, pp.225-229, 1991.

[5] S.L. Johnson and C.T. Ho, "Optimal broadcasting and personalized communication in hypercubes," IEEE Trans. Computers, Vol.38, No.9, pp.1249-1268, 1989.

[6] J.-S. Kim, E. Cheng, L. Liptak and H.-O. Lee, "Embedding hypercubes, rings and odd graphs into Hyper-stars," International Journal of Computer Mathematics, 게재 예정.

[7] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, and H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp. 858-865, 2002.

[8] C.-T. Lin, "Embedding k(n-k) edge-disjoint spanning trees in arrangement graphs," J. Parallel and Distributed Computing, Vol.63, pp.1277-1287, 2003.

[9] W. Shi and P.K. Srimani, "One to all broadcast in hyper butterfly networks," International Conference on High Performance Computing, pp.155-162, 1998.

[10] 김종석, 오은숙, 이형옥, "하이퍼-스타 연결망의 위상적 망성질과 방송 알고리즘", 정보처리학회논문지A, Vol.11-A, No.5, pp.341-346, 2004.

[11] 김종석, 이형옥, "상호연결망 HS(2n,n)의 이분할 에지수와 고장 지름 분석", 정보처리학회논문지A, Vol.12-A, No.6, pp.499-506, 2005. 12.

[12] 김종석, 이형옥, "PMC 모델과 비교진단모델을 이용한 하이퍼-스타 연결망의 진단도 분석", 정보처리학회논문지A, Vol.13-A, No.1, pp.19-26, 2006. 2.

김 종 석

e-mail : rockhee7@gmail.com
1995년 순천대학교 전산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과
(이학석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과
(이학박사)
2005년~2008년 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과
박사후연구원
2008년~현 재 영남대학교 전자정보공학부 연구교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 네트워크 설계 및 분석

김 성 원

e-mail : swon@ynu.ac.kr
1990년 서울대학교 제어계측공학과(학사)
1992년 서울대학교 제어계측공학과
(공학석사)
2002년 서울대학교 전기컴퓨터공학부
(공학박사)
2005년~현 재 영남대학교 전자정보공학부 조교수
관심분야 : 무선 네트워크, 모바일 네트워크, 임베디드시스템

이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr
1994년 순천대학교 전산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(박사)
1999년~2002년 한국정보사회진흥원
(선임연구원)
2006년~2007년 University of Texas at Dallas 교환교수
2002년~현 재 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크
설계 및 보안