PMC 모델과 비교진단 모델을 이용한 하이퍼-스타 연결망의 진단도 분석

김 종 석† · 이 형 옥††

요 약

진단도는 상호연결망의 신뢰도를 측정하는 중요한 요소 중 하나이다. 고장 노드를 진단하기 위한 대표적인 모델로 PMC 모델과 비교진단 모델이 있다. 본 논문에서는 두 모델을 이용하여 정규연결망 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 진단도(Diagnosability)가 n임을 보인다.

키워드 : 진단도, 하이퍼-스타 연결망, PMC 및 비교진단 모델

Analysis of Diagnosability for Hyper-Star Network Under the PMC and the Comparison Diagnosis Model

Kim Jongseok† · Lee Hyeongok††

ABSTRACT

Diagnosability is an important factor in measuring the reliability of an interconnection network. Typical models of fault diagnosis are the PMC and the comparison diagnosis model. In this paper, we prove that the regular network Hyper-Star $HS(2n,n)$ under two models is n-diagnosable.

Key Words : Diagnosability, Hyper-star Network, PMC and Comparison Diagnosis Model

1. 서 론

하드웨어 기술의 급격한 발전으로 많은 연산을 요구하는 응용분야의 문제를 해결하기 위해 많은 개수의 프로세서들을 상호연결망으로 연결하여 자료를 처리하는 병렬처리 기법이 발전하게 되었다. 병렬처리 기법은 시스템을 구성하는 프로세서들의 개수가 증가함에 따라 프로세서의 고장 발생 가능성은 갈수록 높아지게 되어 시스템을 구성하는 프로세서들에 대한 신뢰도 문제는 병렬처리 시스템 전체의 성능유지를 위해 중요한 평가 항목이 되었다.

병렬처리 시스템을 구성하는 프로세서에서 고장(fault) 프로세서가 발생하면 고장 프로세서를 복구하거나 고장으로부터 자유로운(fault-free) 프로세서들을 재배치함으로써 시스템의 신뢰도를 높이게 되는데 고장 프로세서를 복구하거나 재배치하기 전에 고장 프로세서를 찾아내는 과정이 필요하다. 이러한 과정을 고장진단(fault diagnosis)이라 하고, 병렬처리 시스템에서 진단 가능한 최대 고장허용 프로세서의 개수를 시스템의 진단도(diagnosability)이라 한다[1].

고장 프로세서를 진단하기 위해 지금까지 몇 가지 모델들이 발표되었는데 그 중 대표적인 모델로 PMC(Preparata, Metze, and Chien) 모델과 비교진단 모델이 있다[4, 5]. PMC 모델에서는 연결된 프로세서들이 서로를 테스트한 후 테스트한 결과를 모아서 프로세서를 진단함으로써 테스트된 프로세서가 고장인지 아닌지를 결정하는 방식이다[5]. 비교진단 모델은 Malek과 Maeng에 의해 발표되었고, 이 모델은 비교기프로세서(comparator processor)를 이용하여 2개의 프로세서를 진단하는 방법이다. 즉, 2개 프로세서에 동일한 입력 값을 대입하여 비교기프로세서에 의해 출력된 결과 값을 비교하여 진단하는 방식이다[4]. 비교기프로세서는 입력 값을 대입하는 2개 프로세서들과 동시에 연결되어 있는 프로세서이고, 비교기 프로세서에 의해 테스트된 2개 프로세서의 결과 값이 동일한지 그렇지 않으면 동일하지 않은지에 따라 고장 프로세서인지 아닌지를 알 수 있다. 즉, 동일하면 2개 프로세서가 모두 고장이 아니고, 동일하지 않으면 최소 한개 프로세서는 고장 프로세서이다. 만약 어떤 시스템에서 비교 진단 모델을 이용하여 시스템 내부의 모든 프로세서들의 고장을 진단할 수 있다면, [6]에서 제안된 고장 프로세서

---

† 정 회 원 : 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 Post-doctoral
†† 종신회원 : 순천대학교 사범대학 컴퓨터교육과 조교수(교신저자)
논문접수 : 2005년 8월 31일, 심사완료 : 2006년 1월 27일

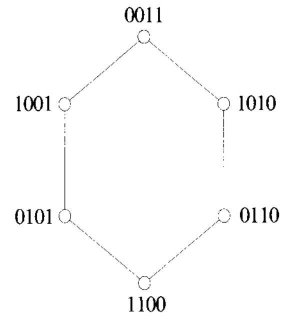
를 찾아낼 수 있는 다항시간(polynomial time) 알고리즘을 이 시스템에 적용할 수 있다. 지금까지 제안된 여러 가지 상호연결망에서 비교 진단 모델을 이용하여 상호연결망의 진단도를 분석한 연구 결과들이 발표되었다[6-8].

최근에 병렬컴퓨터 구조로 하이퍼-스타 연결망이 제안되었다[3]. 하이퍼-스타 그래프는 같은 개수의 노드를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용(network cost)을 개선하였고, 차원이 증가함에 따라 노드의 개수가 급격하게 증가하는 스타(star) 연결망의 단점을 보완한 상호연결망이다. 하이퍼-스타 상호연결망의 대표적인 특징은 하이퍼큐브의 서브연결망이면서 이진수를 사용하여 정의되는 특별한 스타 연결망 형태를 갖는다[9]. 하이퍼-스타 연결망에 대해 지름, 최적 라우팅 알고리즘, 노드 대칭성, 최대 고장허용도, 이분할 연결망, 방송 알고리즘 등이 발표되었다[3,9]. 본 논문에서는 정규연결망을 갖는 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 진단도가 n임을 보인다. 이러한 결과는 [6]에서 제시한 다항시간 복잡도 알고리즘을 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$에서 사용할 수 있음을 의미한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 하이퍼-스타 연결망의 정의와 기본 성질을 살펴보고, 3장에서 고장진단 모델로 널리 알려진 2가지 모델을 적용하여 하이퍼-스타 상호연결망의 진단도가 n임을 보이고, 마지막으로 결론을 맺는다. 본 논문에서는 상호연결망을 그래프로 모델링하여 분석하므로 상호연결망의 프로세서와 그래프의 노드를 동일한 의미로 사용한다.

2. 하이퍼-스타 그래프의 성질

하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$는 $\binom{m}{k}$개의 노드로 구성되고, 각 노드는 m개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_m$으로 표현되며, 비트스트링에서 $|b_i=\text{“1”}|=k$ 이고 $|b_i=\text{“0”}|=m-k$ 이다($1\le i\le m$). 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$의 임의의 노드 u=0...01...1에서 원소 “0”의 개수가 $m-k$이고 “1”의 개수가 k이면 노드 u의 비트스트링을 $u=0^{m-k}1^k$로 표시한다. 노드의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_m$에서 스트링의 원소 b_1과 b_i가 서로 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 연산을 치환연산이라 하고 심벌 σ_i로 나타낸다. 예를 들어, 노드 u와 v의 비트스트링이 $u=b_1b_2...b_i...b_m$, $v=b_ib_2...b_1...b_m$ 이라 할 때, 2개 노드의 관계가 치환 연산자에 의해 $v=\sigma_i(u)$이 성립한다면 노드 u와 v를 연결하는 차원에지를 i-차원에지라고 한다($1\le i\le m$)[3,9]. (그림 1)은 하이퍼-스타 그래프 $HS(4,2)$의 예이다. 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 임의의 노드 u에서 치환 $\sigma_{k1},\sigma_{k2},...,\sigma_{kt}$을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $<<k_1,k_2,...,k_t>>$로 표시하겠다. 예를 들어, (그림 1)에서 노드 0011에서 노드 1100으로 가는 경로는 노드 0011에서 적용된 치환연산 순서에 의해 <<3,2,4>> 또는 <<4,2,3>>이다. 본 논문에서 연구의 대상으로 하는 하이퍼-스타 그래프 $HS(m,k)$는 정규연결망을 갖는 경우로 제한하므로 하이퍼-스타 그래프의 형태는 $HS(2n,n)$이다.



(그림 1) 하이퍼 스타 $HS(4,2)$

하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 $u=u_1u_2...u_i...u_{2n}$와 $v=v_1v_2...v_i...v_{2n}$이라 할 때, 2개 노드 u와 v 사이에 Exclusive-OR 함수를 적용시킨 결과 생성된 노드를 R이라 하고, 노드 $R=r_1r_2...r_i...r_{2n}$, $r_i=u_i\oplus v_i$으로 표시하겠다. 노드 u와 v 사이의 최단경로 길이를 $dist(u,v)$라고 표시하면 노드 사이의 길이 $dist(u,v)$는 다음과 같다.

$$dist(u,v)=\sum_{i=2}^{2n} r_i\,,\ (r_i=\text{“1”})$$

[정의 1] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$ 연결망의 임의의 노드를 $u=0^n1^n$와 v, w이라 하자. 만약 노드 u와 w의 경로길이 $dist(u,w)$가 m이면 노드 u로부터 노드 w를 연결하는 경로 상에 존재하는 임의의 노드 w는 레벨 L_m에 위치한다.

하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$에서 노드 $u=0^n1^n$으로부터 노드 $v=1^n0^n$를 연결하는 경로 P를 $<<k_1,k_2,...k_i,...,k_{2n-1}>>$이라고 할 때, i가 홀수인 경우 k_i는 $n+1$과 $2n$ 사이에 위치하고, i가 짝수인 경우 k_i는 2와 n 사이에 위치한다. 즉, 경로 P는 치환 $\sigma_{n+1},\sigma_2,\sigma_{n+2},\sigma_3,...,\sigma_n,\sigma_{2n}$에 의해 구성된다. 그러므로 정의 1에 의해 노드 v는 L_{2n-1}에 위치해 있음을 알 수 있다. 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$의 정의에 의해 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다.

[성질 1] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 노드 u를 0^n1^n이라고 하고, 노드 u를 출발 노드로 하는 2개의 경로 $P=<<k_1,k_2,...,k_t>>$와 $Q=<<h_1,h_2,...,h_t>>$가 있다고 하자. 경로 P와 경로 Q에서 짝수번째 위치의 차원에지 값들이 순서에 상관없이 서로 같고 홀수번째 위치의 차원에지 값들이 순서에 상관없이 서로 같으면 경로 P와 경로 Q에 의해 도착하는 노드는 동일하다($k_i\ne k_j$, $h_i\ne h_j$, $1\le i,j\le t$).

3. 하이퍼-스타 연결망의 고장진단 분석

멀티프로세서는 각 프로세서들을 노드로, 프로세서를 연결하는 통신 채널을 에지로 나타내는 무방향 그래프(undirected graph)로 표현할 수 있다. 본 논문에서는 각 노드 v_i를 포함하는 노드들의 집합을 V로, 두 노드 v_i와 v_j를

연결하는 에지 (v_i,v_j)를 포함하는 에지들의 집합을 E로 표현하고, 집합 V와 E로 표현되는 멀티프로세서를 무방향 그래프 $G=(V,E)$라고 표현하겠다. 본 논문에서 이후에는 무방향 에지 (v_i,v_j)를 비교기프로세서를 사용하는 경우에 필요에 따라 방향에지 $<v_i,v_j>$와 $<v_j,v_i>$로 구분하여 사용한다. 하이퍼-스타 연결망의 고장진단 분석은 이미 제안된 PMC 모델과 비교진단 모델을 각각 적용하여 분석하도록 한다.

3.1 PMC 모델

[5]에서 처음으로 제안된 PMC 고장진단 모델은 연결된 2개 노드가 직접적으로 서로를 테스트하여 결과 값을 출력하는 모델로 출력된 결과 값에 의해 노드들의 상태가 고장인지 고장이 아닌지를 구분할 수 있다. 노드 V에 포함된 인접한 두 노드를 u, v라 하고, 두 노드를 연결하는 방향성 에지를 $<u,v>$이라 하면, 노드 u는 테스트 노드를 의미하고 v는 테스트된 노드를 의미한다. $<u,v>$의 테스트 결과 값이 1이면 노드 v는 고장노드임을 나타내고, 결과 값이 0이면 노드 v는 고장노드가 아님을 나타낸다. 방향성 에지(directed edge) $<u,v>$를 포함하는 모든 방향성 에지들의 집합을 L로 표현하면 무방향 그래프 $G=(V,E)$는 방향성 그래프 $T=(V,L)$로 표현 가능하다. 모든 고장 노드를 인식하는 과정을 시스템의 고장진단이라 하고, 시스템 G의 인식 가능한 최대 고장 노드의 개수를 G의 진단도이라 하고, $t(G)$로 표현한다.

[정의 2] 고장 노드 개수가 t개를 넘지 않고 재배치되지 않은 모든 고장 노드가 인식 가능하다면 m개의 노드로 구성된 시스템 G는 t-진단가능(diagnosable)하다고 한다.

정리 1과 2는 [2]와 [5]에서 제안된 정리로서 PMC 모델을 이용한 t-진단 가능한 시스템의 조건을 나타내고 있다.

[정리 1] 병렬처리 시스템 G를 무방향 그래프 $G(V,E)$로 표현하고, $|V|=m$이라고 하자. G가 다음의 두 조건을 만족하면 G는 t-진단가능하다[5].

1. $m \geq 2t+1$
2. 각 노드가 t개 이상의 다른 노드로부터 테스트를 받는다.

[정리 2] m개의 노드로 구성된 G가 다음의 두 조건을 만족하면 G는 t-진단 가능하다[2].

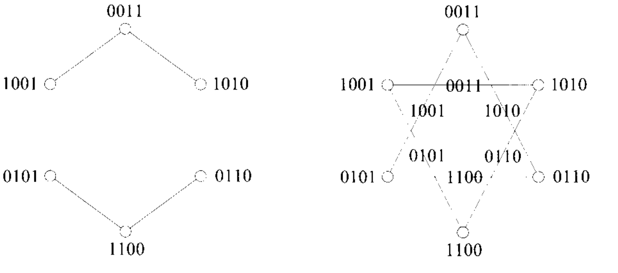
1. $m \geq 2t+1$
2. $k(G) \geq t$. ($k(G)$는 G의 노드 연결도(node connectivity)를 나타낸다.)

하이퍼-스타 $HS(2n,n)$는 $\binom{2n}{n}$개의 노드로 구성되어 있고, 분지수와 노드 연결도는 n이므로 $HS(2n,n)$의 각 노드는 n개의 다른 노드들과 연결되어 있음을 알 수 있다[3]. 이때 $t=n$이라고 가정하면 $m=\binom{2n}{n} \geq 2n+1$임을 쉽게 알 수 있다. 그러므로 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$는 위의 정리 1과 2를 모두 만족하므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

[정리 3] PMC 모델을 이용한 하이퍼-스타 $HS(2n,n)$는 n-진단가능하다.

3.2 비교진단 모델

비교진단 모델은 [4]에서 처음으로 소개되었는데, 이 모델은 한 쌍의 프로세서에 동일한 입력 값을 대입하여 출력된 결과 값을 비교하여 테스트한다. 결과 값을 비교하는 비교기프로세서는 입력 값을 대입하는 프로세서들과 동시에 연결되어 있는 프로세서이다. 따라서 비교기프로세서에 의해 테스트된 두 프로세서의 결과 값이 동일한지 그렇지 않은지에 따라 프로세서의 고장 여부를 알 수 있다. 즉, 동일하면 두 프로세서가 모두 고장이 아니고, 동일하지 않으면 최소 하나의 프로세서는 고장 프로세서이다. 비교기프로세서를 v이라하고 비교 대상 노드들을 u, w이라하면, 방향에지 $<v,u>$와 $<v,w>$는 그래프 G의 에지 집합 E에 포함된다.



(그림 2) 하이퍼-스타 $HS(4,2)$와 멀티그래프 M

그래프 G의 비교진단 기법은 멀티그래프 $M=(V,C)$으로 표현 가능하다. 멀티그래프 $M=(V,C)$에서 V는 노드들의 집합을 나타내고 C는 에지들의 집합을 나타내는데, 이때 에지는 $<u,w>_v$로 표현하고 노드 v는 비교기 프로세서로써 노드 u와 w를 동시에 연결하는 노드이다. (그림 2)는 하이퍼-스타 $HS(4,2)$와 멀티그래프 M을 나타낸다. 비교기프로세서 v에 의해 2개 노드 u와 w를 비교한 결과를 $r(<u,w>_v)$로 표현하겠다. $r(<u,w>_v)=0$이면 노드 v, u, w 모두 고장노드가 아니고, $r(<u,w>_v)=1$이면 노드 v, u, w 중에 적어도 한 개의 노드는 고장 노드이다. 만약, 비교기프로세서 v가 고장노드이면 u와 w가 고장 노드인지 아닌지를 알 수 없기 때문에 그 결과를 신뢰할 수 없다. 멀티그래프 M의 모든 비교 진단 결과를 모아 놓은 것을 신드롬 s로 표현하고, 신드롬은 함수 $s: C \rightarrow \{0,1\}$로 나타낸다. 멀티 그래프 $M=(V,C)$에서 노드집합 V의 부분 집합을 F라고 하자. 만약 F의 모든 노드가 고장이고, $V-F$의 모든 노드가 고장이 아닌 경우에 신드롬 s가 발생된다면, 집합 F는 신드롬 s를 포함한 일관된 상태에 있다고 말한다. 또한 신드롬 s를 포함한 일관된 상태에 있는 단일한 부분집합 F가 존재한다면 그 그래프는 진단가능하다고 한다.

[정의 3] 그래프 G의 고장 노드의 개수가 t개를 넘지 않을 때, 그래프 G의 진단도는 t로 표현 가능하며 이 그래프 G는 t-진단가능하다고 한다.

본 장에서는 비교진단 모델을 이용한 하이퍼-스타 그래프가 n-진단가능 함을 보이겠다. 증명에 사용되는 용어의 정의와 표현 방식은 다음과 같다. 한 그래프에 서로 다른 비교진단 기법이 적용 가능하므로 그래프 G에 대한 비교진단 기법을 적용하는 멀티그래프를 $M^*=(V,C^*)$으로 표현하겠다.

$$C^*=\{<u,w>_v \mid <v,u>\in E \text{이고 } <v,w>\in E\}$$

노드 v와 연결된 모든 노드들의 집합을 $N(v)=\{u \mid (v,u)\in E\}$로 나타내고, 부분집합 $X\subset V$가 존재할 때 X의 노드들과 연결된 $V-X$의 노드들의 집합을 $N(X)=(\cup_{v\in X}N(v))-X$로 나타내겠다. 최소 하나 이상의 에지를 갖는 그래프 G의 노드 중복 없는 사이클(node disjoint cycle)을 Q로 표현하고, Q의 길이는 구성하고 있는 에지의 개수로 나타낸다.

$u\in V$인 노드 u가 존재할 때, u를 포함하는 그래프를 $G_u=(X_u,Y_u)$로 나타내겠다.

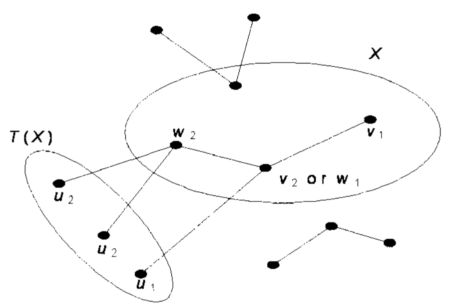
$$X_u=\{v \mid (u,v)\in E \text{이거나 } (u,v)\in C\}$$

$$Y_u=\{(v,w) \mid v,w\in X_u \text{이고 } (u,v)_w\in C\}$$

즉, X_u의 노드는 u와 연결된 노드이거나 다른 노드에 의해 u와 비교된 노드이고, Y_u는 X_u의 노드들끼리 연결된 에지들의 집합을 나타낸다.

K를 G의 부분집합이라고 가정하고, 만약 E의 모든 에지가 K의 노드를 최소 하나의 단말 노드(end node)로 갖는다면 K는 G의 노드 커버(cover)라고 한다. 또 G의 최소 구성요소의 노드 커버는 최소 노드 커버라고 한다. $u\in V$인 경우, 그래프 G_u의 최소 노드 커버의 구성요소는 노드 u의 차수(order)라고 한다.

X에 포함되지 않은 노드들 중에 X의 한 노드가 X의 다른 노드를 비교하여 연결된 노드들의 집합을 $T(X)$로 표현하면, $T(X)=\{u \mid (u,v)_w\in C \text{이고 } v,w\in X \text{이고 } u \notin X\}$이다.



(그림 3) X와 $T(X)$의 예

정리 4는 [6]에서 제안된 정리로서 고장 진단 모델을 이용한 t-진단가능 한 시스템의 조건을 나타내고 있다. 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$이 정리 4의 조건을 만족함을 보임으로써 t-진단가능 함을 보이도록 한다.

[정리 4] m개의 노드로 구성된 그래프 G가 t-진단가능하기 위한 조건은 다음과 같다[6].

1. $m\geq 2t+1$
2. 각 노드의 최소 차수는 t이다.
3. $|X(\subset V)|=m-2t+p$이고, $0\leq p\leq t-1$이며, $|T(X)|>p$.

[정리 5] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 모든 사이클의 길이는 짝수이다[3].

[정리 6] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이는 6이다.

[증명] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$은 이분할 연결망이고, 내부에 존재하는 모든 사이클의 길이는 정리 5에 의해 짝수이다. 노드 $u=0^n1^n$는 치환 $\sigma_i(u)$에 의해 노드 u'에 연결된다$(n+1\leq i\leq 2n)$. 노드 u'의 첫 번째 심벌은 "1"이고, 노드 u'는 치환 $\sigma_j(u')$에 의해 노드 u''에 연결된다$(2\leq j\leq n)$. 노드 u''의 첫 번째와 i번째 심벌은 "0"이고, 노드 u''는 치환 $\sigma_k(u'')$에 의해 노드 $\bar{u}$에 연결된다$(n+1\leq k\neq i\leq 2n)$. 성질 2에 의해 노드 u와 노드 $\bar{u}$를 연결하는 다른 경로 $<<k,j,i>>$가 존재함을 알 수 있다. 그러므로 경로 $<<i,j,k>>$와 경로 $<<k,j,i>>$을 연결하면 길이 6인 사이클이 구성됨을 알 수 있으므로 $HS(2n,n)$ 내부에 존재하는 사이클의 최소 길이는 6이다. □

[정리 7] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 임의의 두 노드를 u, v라 하면,

1. $dist(u,v)=1$이면, $|N(u)\cap N(v)|=0$이다.
2. $dist(u,v)=2$이면, $|N(u)\cap N(v)|=1$이다.
3. $dist(u,v)>2$이면, $|N(u)\cap N(v)|=0$이다.

[증명] 1. 만약 $dist(u,v)=1$인 2개 노드 u, v 사이에 공통 인접 노드 w가 존재한다면, 이 3개 노드는 길이 3인 사이클을 구성하게 된다. 이것은 정리 5와 6에 대한 모순임을 알 수 있으므로 인접해 있는 노드 u, v 사이에 공통 인접 노드 w가 존재하지 않음을 알 수 있다.

2. 만약 $dist(u,v)=2$인 두 노드 u, v 사이에 2개의 공통 인접 노드 w와 a가 존재한다면, 이 4개 노드는 길이 4인 사이클을 구성하게 된다. 이것은 정리 6에 대한 모순이다. 또 2개 노드 u, v 사이에 공통 인접 노드가 존재하지 않는다면 $dist(u,v)\neq 2$임을 나타내므로 가정에 대한 모순이다. 그러므로 2개 노드 u, v 사이에는 한 개의 공통 인접 노드가 존재함을 알 수 있다.

3. $dist(u,v) > 2$라는 가정은 두 노드 u, v 사이의 거리가 3 이상임을 나타낸다. 그러므로 2개 노드 u, v 사이에는 적어도 2개 이상의 노드가 존재해야하므로 2개 노드 u, v 사이에는 공통 인접 노드가 존재하지 않음을 알 수 있다. □

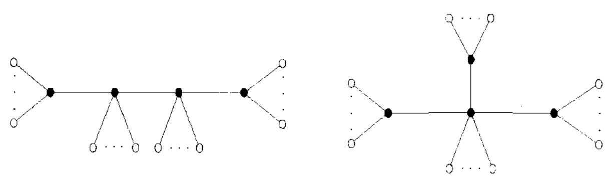
[정리 8] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 임의의 2개 노드를 u, v라 하면, $|N(\{u,v\})| \geq 2n-2$이다.

[증명] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$은 정규 그래프이고 각 노드의 분지수는 n이다. 그러므로 $|N(u)|= |N(v)|= n$임을 알 수 있다. 임의의 2개 노드 u, v의 인접 조건에 따라 다음과 같이 2가지 경우로 나눌 수 있다.

(경우 1) 2개 노드 u, v 가 인접한 노드인 경우
정리 7로부터 $|N(u)\cap N(v)|= 0$임을 알 수 있다. 그러므로 $|N(\{u,v\})|= |N(u)|+ |N(v)|- |\{u,v\}| = 2n-2$이다.
(경우 2) 2개 노드 u, v 가 인접한 노드가 아닌 경우
$|N(u)\cap N(v)|\le 1$임을 알 수 있다. 그러므로 $|N(\{u,v\})|= |N(u)| + |N(v)| - |N(u)\cap N(v)| \ge 2n-1 > 2n-2$이다. 따라서 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 임의의 2개 노드 u, v는 최소 $2n-2$개의 인접 노드를 갖는다. □

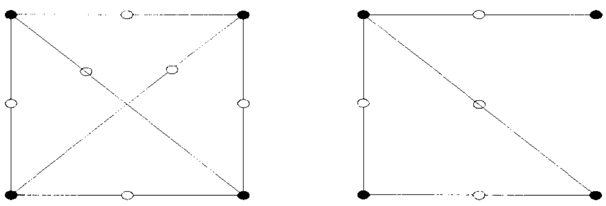
[정리 9] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$에서 임의의 4개 노드를 u, v, w, x이라 하면 $|N(\{u,v,w,x\})|\ge 4n-6$이다.

[증명] 임의의 4개 노드들 사이에 연결된 공통 인접 노드를 Nc라고 표현하겠다. $Nc = |N(u) \cap N(v)| + |N(u)\cap N(w)| + |N(u)\cap N(x)| + |N(v)\cap N(w)| + |N(v)\cap N(x)| + |N(w)\cap N(x)|$이다. 정리 7에 의해 $Nc\le 6$임을 알 수 있다. 이를 증명하기 위해 노드의 인접관계에 따라 5가지 경우로 나누어 보인다.



(그림 4) 4개 노드 u, v, w, x가 모두 인접한 경우

(경우 1) 4개 노드 u, v, w, x 가 모두 인접한 경우.
경우 1은 (그림 4)에 나타낸 2가지 경우만 존재한다.
첫째, $|N(\{u,v,w,x\})| = |N(u)| + |N(v)| + |N(w)| + |N(x)| - |\{v\}| - |\{u,w\}| - |\{v,x\}| - |\{w\}| = 4n-6$.
둘째, $|N(\{u,v,w,x\})| = |N(u)| + |N(v)| + |N(w)| + |N(x)| - |\{v\}| - |\{u,w,x\}| - |\{v\}| - |\{v\}| = 4n-6$.
(경우 2) 3개 노드는 인접노드이고 나머지 1개 노드는 인접노드가 아닌 경우.
정리 5와 6에 의하여 $|N(\{u,v,w\}) \cap N(x)|\le 2$임을 알 수 있다.
$|N(\{u,v,w,x\})| = |N(u)| + |N(v)| + |N(w)| + |N(x)| - |\{v\}| - |\{u,w\}| - |\{v\}| - |N(\{u,v,w\}) \cap N(x)| \ge 4n-6$.
(경우 3) 2개 노드 u, v가 인접 노드이고, 2개 노드 w, x가 인접 노드이며 u, v와 w, x는 인접하지 않은 경우.
정리 5와 6에 의하여 $|N(\{u,v\}) \cap N(w,x)| \le 2$임을 알 수 있다.
$|N(\{u,v,w,x\})| = |N(u)| + |N(v)| + |N(w)| + |N(x)| - |\{v\}| - |\{u\}| - |\{x\}| - |\{w\}| - |N(\{u,v\}) \cap N(w,x)| \ge 4n-6$.

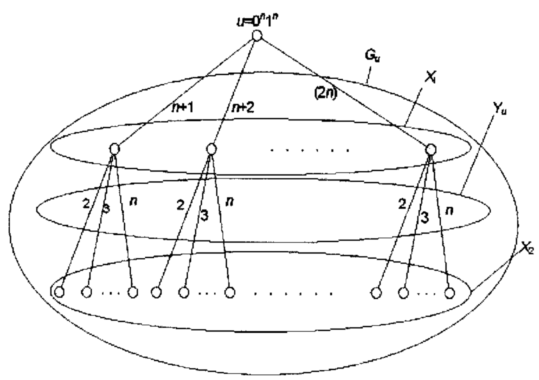


(그림 5) 4개 노드가 모두 다른 노드와 인접하지 않으면서 Nc가 존재하는 경우

(경우 4) 2개 노드 u, v가 인접 노드이고, 나머지 노드는 다른 노드와 인접하지 않은 경우.
정리 5와 6에 의하여 $Nc = |N(\{u,v\})\cap N(w)| + |N(\{u,v\})\cap N(x)| + |N(w)\cap N(x)| \le 2$임을 알 수 있다.
$|N(\{u,v,w,x\})| = |N(u)| + |N(v)| + |N(w)| + |N(x)| - |\{v\}| - |\{u\}| - Nc \ge 4n-4 > 4n-6$.
(경우 5) 4개 노드가 모두 다른 노드와 인접하지 않으면서 Nc가 존재하는 경우.
경우 5는 (그림 5)에서 나타낸 경우만이 존재하므로 $Nc \le 6$이다.
$|N(\{u,v,w,x\})| = |N(u)| + |N(v)| + |N(w)| + |N(x)| - Nc \ge 4n-6$.
그러므로 $HS(2n,n)$의 임의의 4개 노드 u, v, w, x 는 최소 $4n-6$개의 인접 노드를 갖는다. □

[정리 10] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$의 모든 노드의 차수(order)는 n이다.

[증명] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$은 노드 대칭적인 성질이 있으므로 노드 $u=0^n1^n$의 차수만을 증명하겠다.



(그림 6) G_u, X_1, X_2, Y_u의 예

$G_u=(X_u,Y_u)$의 정의에 의해 $G_u=(X_u,Y_u)$는 노드 u에 연결된 노드들과 다른 노드에 의해 u와 비교된 노드들로 구성되어 있다. 즉, X_u는 두 개의 집합으로 구성되어 있다.
$X_u=X_1\cup X_2$ $=\{v|i$-에지에 의해 노드 u와 연결된 노드, $n+1\le i\le 2n\}$

$\cup$ $\{w|j$-에지에 의해 노드 v와 연결된 노드, $2\le j\le n\}$.

X_1의 노드 개수는 n이고, X_2의 노드 개수는 $n(n-1)$이다. Y_u는 모든 에지 (w,v)로 구성되는데 노드 v는 u와 w의 비교기 프로세서이므로 노드 v는 u와 w에 동시에 연결되어 있다. 그러므로 $Y_u=\{(w,v)|v\subset X_1,\ w\subset X_2\}$이다. 그래프 G_u가 대칭 구조를 갖는 이분할 그래프(그래프의 노드들을 두 개의 집합 V_1과 V_2로 분할할 수 있는 그래프로, 그래프를 구성하는 모든 에지의 하나의 단말 노드가 V_1에 속해 있고, 나머지 하나의 단말 노드는 V_2에 속해 있는 그래프)임을 지금까지의 증명으로 알 수 있으므로, G_u의 최소 노드 커버가 X_1에 속해 있는 노드들의 개수임을 알 수 있다. X_1의 구성요소의 개수는 n이므로, u의 차수는 n이다. □

[정리 11] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$ 구조를 갖는 시스템을 그래프 $G=(V,E)$이라고 표현하고 그래프 G에 대한 비교진단 기법을 적용하는 멀티그래프는 $M^*=(V,C^*)$이라고 표현하겠다. 비교진단 모델을 이용한 그래프 G는 n-진단가능하다($n\geq 4$).

[증명] 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$이 정리 4에서 제시한 3가지 조건을 충족한다는 것을 보임으로써 n-진단가능 함을 보이도록 한다.

1. $m\geq 2t+1$
2. 각 노드의 최소 차수는 t이다.
3. $|X(\subset V)|=m-2t+p$이고, $0\leq p\leq t-1$이며, $|T(X)|>p$.

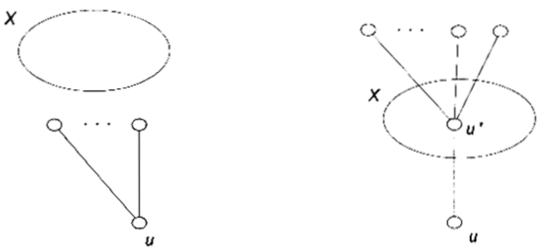
$n\geq 2$일 때, $\binom{2n}{n}\geq 2n+1$라는 것을 명백하게 알 수 있으므로 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$이 첫 번째 조건을 충족함을 알 수 있고, 각 노드의 차수가 n임을 정리 11에서 증명했으므로 $HS(2n,n)$이 두 번째 조건을 충족함을 알 수 있다. 마지막으로 $|X(\subset V)|=\binom{2n}{n}-2n+p$이고, $0\leq p\leq n-1$이며, $|T(X)|>p$ 임을 증명하도록 한다.

먼저 $p=n-1$일 때 조건을 충족함을 보인 후에 $p=0,1,\ldots,n-2$일 때 충족함을 보이겠다.

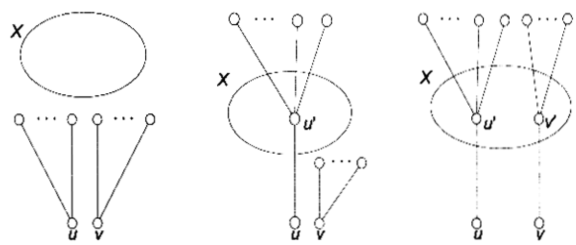
$p=n-1$이면, $|X|=\binom{2n}{n}-2n+n-1=\binom{2n}{n}-n-1$이므로 $|V-X|=n+1$이다.

모순을 이용하여 증명하기 위해 $|T(X)|\leq n-1$이라고 가정하자. 이 가정의 의미는 $V-X$에 최소 2개 이상의 노드가 존재한다는 것을 나타내는데 이 노드들은 $T(X)$에 포함되지 않는 노드이다. 임의의 두 노드 u, v에 대해 $u, v\in V-X$이고 $u, v\not\in T(X)$라고 하자. $T(X)$의 정의에 의해 $u\not\in T(X)$이면, u는 (1) $N(u)\cap X=\emptyset$ 이거나, 또는 (2) $u'\in N(u)\cap X$인 경우 $N(u')\cap X=\emptyset$ 이다.

그리고 노드 u, $v\not\in T(X)$인 경우를 (그림 8)에 나타내었다. (그림 8)의 첫 번째 경우를 보면 2개 노드 모두 (1)에 속해 있음을 알 수 있다. 정리 8에 의해 $|N(\{u,v\})|\geq 2n-2$이므로, $|V-X|\geq|N(\{u,v\})|+|\{u,v\}|\geq 2n-2+2=2n$이다. (그림 8)의



(그림 7) $u\not\in T(X)$인 경우



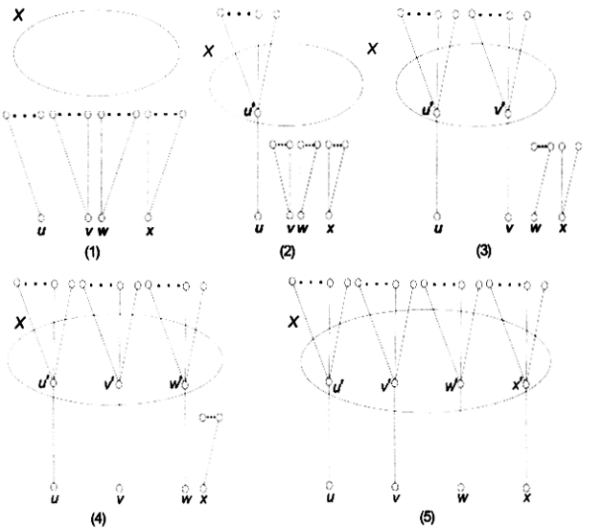
(그림 8) u, $v\not\in T(X)$인 경우

두 번째 경우를 보면 노드 u는 (1)에 노드 v는 (2)에 속해 있음을 알 수 있다. 노드 v와 연결된 노드는 모두 X에 포함되어 있지 않기 때문에 u'와 v는 인접 노드가 아님을 알 수 있다. 정리 8의 (경우2)에 의해 $|N(\{u,v\})|\geq 2n-1$이므로 $|V-X|\geq|N(\{u',v\})|+|\{v\}|\geq 2n-1+1=2n$이다. (그림 8)의 세 번째 경우를 보면 2개 노드 모두 (2)에 속해 있고, u'와 v'는 인접노드가 아님을 알 수 있다. 정리 8의 (경우2)에 의해 $|N(\{u,v\})|\geq 2n-1$이므로 $|V-X|\geq|N(\{u',v\})|\geq 2n-1$이다. 이상의 3가지 경우에 의해 $|V-X|\geq 2n-1$임을 알 수 있다. 그런데 $n\geq 3$일 때, $2n-1>n+1=|V-X|$이므로 이 결론은 $|V-X|=n+1$에 대해 모순 된다. 따라서 $p=0,1,\ldots,n-2$이면, $|X|=\binom{2n}{n}-2n+p$이므로 $|V-X|=2n-p$이다.

모순을 이용하여 증명하기 위하여, $|T(X)|\leq p$라고 가정하자. 이 가정의 의미는 $V-X$에 최소 $2n-p-p=2(n-p)$개의 노드가 존재한다는 것을 나타내는데, 이 노드들은 $T(X)$에 포함되지 않는 노드들이다. $p\leq n-2$이므로, $2(n-p)\geq 4$이다. 임의의 4개 노드 u,v,w,x에 대해 $u,v,w,x\in V-X$이고 $u,v,w,x\not\in T(X)$라고 하자. $T(X)$의 정의에 의해 $u\not\in T(X)$이면, u는 (3) $N(u)\cap X=\emptyset$ 이거나, 또는 (4) $u'\in N(u)\cap X$인 경우 $N(u')\cap X=\emptyset$ 이다. 노드 $u,v,w,x\not\in T(X)$인 경우는 (그림 9)처럼 5가지 경우로 나타낼 수 있다.

(경우 1) 4개 노드 모두 (3)에 속해 있다. 정리 9에 의해 $|N(\{u,v,w,x\})|\geq 4n-6$이므로, $|V-X|\geq|N(\{u,v,w,x\})|+|\{u,v,w,x\}|\geq 4n-6+4=4n-2$이다.

(경우 2) 노드 u는 (4)에, 나머지 3개 노드는 (3)에 속해있으며, 노드 u는 X에 속해있는 u'와 연결되어 있고, u'는 3개 노드 v, w, x와 인접 노드가 아님을 알 수 있다. 3개 노드 v, w, x의 위치에 따라 다음의 3가지 경우로 나누어 증명한다.



(그림 9) 노드 $u,v,w,x \notin T(X)$인 경우

(경우 2.1) 3개 노드 v, w, x가 모두 인접 노드인 경우로 정리 9의 (경우 2)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v,w,x\})| + |\{v,w,x\}| \geq 4n-6+3 = 4n-3$이다.

(경우 2.2) 2개 노드 v, w가 인접 노드이고 노드 x는 인접 노드가 아닌 경우로 정리 9의 (경우 4)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v,w,x\})| + |\{v,w,x\}| \geq 4n-4+3 = 4n-1$이다.

(경우 2.3) 3개 노드 v,w,x가 모두 인접 노드가 아닌 경우로 정리 9의 (경우 5)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v,w,x\})| + |\{v,w,x\}| \geq 4n-6+3 = 4n-3$이다.

(경우 3) 2개 노드는 (3)에, 2개 노드는 (4)에 속해 있으며, 노드 u는 X에 속해있는 u'와 연결되어 있고, 노드 v는 X에 속해있는 v'와 연결되어 있으며, 노드 u'와 노드 v'와 노드 w, x는 인접 노드가 아님을 알 수 있다. 두 노드 w, x의 위치에 따라 다음의 2가지 경우로 나누어 증명한다.

(경우 3.1) 2개 노드 w, x가 인접 노드인 경우로 정리 9의 (경우 4)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v',w,x\})| + |\{w,x\}| \geq 4n-4+2 = 4n-2$이다.

(경우 3.2) 2개 노드 w, x가 인접 노드가 아닌 경우로 정리 9의 (경우 5)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v',w,x\})| + |\{w,x\}| \geq 4n-6+2 = 4n-4$이다.

(경우 4) 3개 노드는 (4)에, 한 노드는 (3)에 속해 있으며, 노드 u는 X에 속해있는 u'와, 노드 v는 X에 속해있는 v'와, 노드 w는 X에 속해있는 w'와 연결되어 있고, 노드 u'와 노드 v'와 노드 w'와 노드 x는 인접 노드가 아님을 알 수 있다. 정리 9의 (경우 5)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v',w,x\})| + |\{x\}| \geq 4n-6+1 = 4n-5$이다.

(경우 5) 4개 노드 모두 (4)에 속해 있으며, 노드 u', v', w', x'는 모두 인접 노드가 아니다. 정리 9의 (경우 5)에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v',w,x\})| \geq 4n-6$이다.

이상의 5가지 경우에 의해 $|V-X| \geq |N(\{u',v',w,x\})| \geq 4n-6$임을 알 수 있다. 그런데 $n \geq 4$일 때 $4n-6 > 2n = |V-X|$이므로 이 결론은 $|V-X|=2n$에 대해 모순 된다. 그러므로 비교 진단 모델을 이용한 그래프 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$은 n-진단가능하다($n \geq 4$). □

4. 결 론

고장 진단은 고장 노드를 찾아내고 복구하거나 재배치하는 방법으로 시스템의 신뢰도를 향상시키는 방법이다. 비교 진단 모델을 이용할 경우 시스템의 진단도 분석이 가능하다면 시스템 자체 진단도 가능하다. 본 논문에서는 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$ 연결망의 PMC 모델과 비교진단 모델을 이용한 진단도를 분석하여 n-진단가능 함을 보였다($n \geq 4$). 이러한 결과는 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$ 연결망의 고장 노드의 개수가 최대 n일 때, 고장 진단을 위해 [6]에서 제시한 다항시간 알고리즘을 하이퍼-스타 그래프 $HS(2n,n)$에 적용할 수 있다는 것을 의미한다.

참 고 문 헌

[1] J. Fan, "Diagnosability of crossed cubes under the comparison diagnosis model," IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.13, No,10, pp.1099-1104, 2002.

[2] S.L. Hakimi and A.T. Amin, "Characterization of Connection Assigment of Diagnosable Systems," IEEE Trans. Computers, Vol.23, No.1, pp.86-88. 1974.

[3] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, "Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube," Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp.858-865, 2002.

[4] J. Maeng, M. Malek, "A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems," Proc. 11th Int'l Symp. Fault-Tolerant Computing, pp.173-175, 1981.

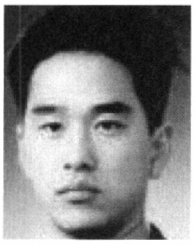
[5] F.P. Preparata, G. Metze, and R.T. Chien, "On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems," IEEE Trans. Electronic Computers, Vol.16, No.12, pp.848-854, 1967.

[6] A. Sengupta and A. Dahbura, "On Self-Diagonsable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach," IEEE Trans. Computers, Vol.41, No.3, pp.284-294, 1991.

[7] D. Wang, "Diagnosability of Hypercubes and Enhanced Hypercubes under the Comparison Diagnosis Model," IEEE Trans. Computers, Vol.48, No.12, pp.1369-1374, 1999.

[8] J. Zheng, S. Latifi, E. Regentova, K. Luo, and X. Wu, "Diagnosability of star graphs under the comparison diagnosis model," Information Processing Letters, Vol.93, No.1, pp.29-36, 2005.

[9] 김종석, 오은숙, 이형옥, "하이퍼-스타 연결망의 위상적 망성질과 방송 알고리즘," 한국정보처리학회 논문지, Vol.11, No.5, pp.341-346, 2004.



김 종 석

e-mail : rockhee7@korea.com
1995년 순천대학교 전자계산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(박사)
현 재 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 Postdoctoral
관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 계산이론, 광네트워크

이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr
1994년 순천대학교 전자계산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(박사)
1999년~2002년 한국전산원 선임연구원
2002년~현재 순천대학교 사범대학 컴퓨터교육과 조교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리 알고리즘, 계산이론, 정보통신서비스 및 정책