

특성 다각형에서 최소링크의 경비원 경로를 구하는 알고리즘

류 상 료[†]

요 약

다각형의 내부를 경로를 따라 이동하면서 감시하는 경비원 경로는 길이 또는 링크의 최소화 등으로 구분할 수 있다. 최소링크의 경비원 경로(watchman route with minimum route)는 경로 진행에서 발생하는 방향 전환의 횟수가 최소인 경비원 경로이다. 본 논문에서는 특성 다각형인 약 가시 다각형(weakly visible polygon)에서 최소링크의 경비원 경로를 구하는 $O(n^2)$ 시간 알고리즘을 제시한다.

An algorithm for finding a watchman route with minimum links in the characteristic polygons

Sang-Ryul Ryu[†]

ABSTRACT

The watchman routes which an watchman patrols the interior of polygon moving along the route are classified to minimum length or minimum links. The watchman route with minimum links has minimum changes of direction in process. In this paper, we present an algorithm with $O(n^2)$ time for finding the watchman route with minimum links in the weakly visible polygons which have specific property.

키워드 : 알고리즘(Algorithm), 가시성(Visibility), 경로(watchman route)

1. 서 론

가시성(visibility)이란 2차원 또는 3차원의 대상이 가진 내부 또는 외부의 가시적 특성을 분석하여 컴퓨터 응용분야에서 활용할 가시성 정보와 효율적인 처리기법 등을 제시하고 있는 분야로서 컴퓨터 그래픽스, 영상 처리, VLSI 설계, 로봇틱스, 네트워크, 지리정보 시스템 등에서 많이 응용되고 있다. 예를 들면 외곽선 검출(edge detection), 은선 및 은면(hidden-line or hidden-surface) 제거, 분할(separability), 다차원 평면의 연결(routing), 로봇의 이동전략(motion planning), 네트워크 전송시스템의 위치 및 연결형태, 지리정보시스템의 위치정보 처리 등의 다양한 문제들을 해결하는데 활용되고있다[12, 13].

화랑(art gallery) 문제는 평면상의 공간으로 주어진 다각형의 내부를 감시하는 경비원들의 인원수나 경비원들의 위

치를 결정하는 문제로서 다각형의 특성을 고려한 연구결과들이 많이 제시되었다[1, 4-6, 13]. 그러나 경비원의 위치가 고정된 경우에는 많은 인원에도 불구하고 감시 공간의 중복성 등으로 인하여 비효율적인 단점을 가지고 있으므로 경비원의 형태에 변화를 주어 내부에서 이동할 수 있는 동적 감시자로서의 역할을 부여한 연구들도 제시되었다. 그 예로서 경비원이 단순 다각형 내부에서 출발하여 경로를 따라 이동하며 전체적으로 감시할 수 있는 최단 경비원 경로를 찾는 효율적인 알고리즘이 제시되었고[3], 직교 다각형과 단조 다각형에 대하여 최단 경비원 경로 및 최소링크의 경비원 경로 등 다양한 종류의 경비원 경로들을 구하는 알고리즘들도 제시되었다[2, 9, 16, 17].

다각형을 2개의 체인으로 분리하여 서로 반대 체인을 따라 이동하는 2명의 감시자들이 체인의 시작점에서부터 항상 서로 볼 수 있는 상태를 유지하며 체인의 끝점에 도착할 수 있는지의 여부를 결정하는 2-guard 문제가 제시되었다. 이때 서로 약 가시적인 2개의 체인으로 구성된 약 가시 다각

* 본 논문은 2002년 청운대학교 학술지원조성비에 의해 연구되었음.

† 정 회 원 : 청운대학교 컴퓨터과학과 교수

논문접수 : 2001년 8월 23일, 심사완료 : 2002년 9월 16일

형만이 2-guard 문제의 조건을 만족함을 증명되었다. 주어진 다각형에 대한 2-guard 문제를 결정할 수 있는 연구결과들이 제시되었다[7, 8].

본 논문에서는 단순 다각형과 다른 특성을 가진 약 가지 다각형에 대하여 1명의 경비원이 경로를 따라 이동하면서 감시할 수 있는 최소링크의 경비원 경로를 구하는 문제를 1 연구하였고 그 결과로 $O(n^2)$ 시간과 $O(n)$ 공간 복잡도의 알고리즘을 제시한다. 경비원 경로는 다각형 내부에 완전히 포함되는 선분들의 연속으로 구성되며, 경비원은 경로를 왕복하며 다각형의 내부를 완전하게 감시할 수 있다. 최소링크의 경비원 경로는 경로의 진행 방향이 전환되는 횟수가 최소인 경로이다.

비전 시스템을 장착하고 경비원 경로를 따라 이동하며 주어진 공간 내부를 감시하는 무인 자동감시 시스템을 가정할 때, 최단 경비원 경로는 최소 길이를 유지하기 위하여 진행 방향의 전환 횟수가 크게 증가할 수 있으므로 방향 제어의 복잡성이나 소요시간 등에서 많은 비용이 소모될 수 있다. 이 경우, 방향 전환의 횟수가 최소인 최소링크의 경비원 경로를 적용하는 것이 더 효율적이며 감시 시스템의 전략적 수행 비용을 더욱 감소시킬 수 있다. 2장에서는 약 가지 다각형의 경비원 경로 문제에 적용할 기본 개념을 제시하고, 3장에서는 최소링크의 경비원 경로를 구하는 알고리즘을 제시하고 마지막으로 4장에서는 결과를 정리하고 앞으로의 연구 방향을 제시한다.

2. 약 가시성 다각형의 경비원 경로 문제

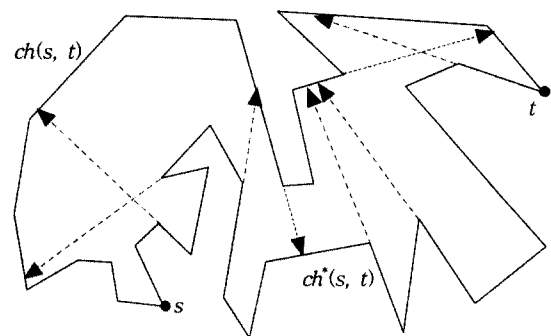
2.1 기본 개념

단순 다각형 P 는 n 개의 꼭지점들을 반 시계(count-clockwise) 방향으로 나열한 순서 집합 $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ 또는 변의 순서 집합 $\{e(v_0, v_1), \dots, e(v_{n-1}, v_0)\}$ 으로 표현할 수 있으며 꼭지점 $v_i(i=0, 1, \dots, n-1)$ 는 2차원 평면상에서 좌표 (x_i, y_i) 로 표현된다. 이웃하는 두 변이 형성하는 꼭지점의 내부 각이 180° 보다 작으면 볼록(convex) 꼭지점이라 하고 180° 보다 클 경우 오목(concave) 꼭지점이라 한다. 임의의 두 점 p, q 를 연결한 선분이 P 의 내부에 완전히 포함될 때, p 와 q 는 서로 가시적(mutually visible)이라고 한다. 다각형 P 의 경계 $Bd(P)$ 의 한 점 p 에서 시작하여 다른 한 점 q 로의 방향을 가지며 다각형의 내부를 이동분하는 방향성 직선(directed line)을 $L(p, q)$ 라고 하고, 반대 방향의 직선을 $L^*(p, q)$ 라고 한다. 그리고 p 에서 q 로의 방향을 가지며 p 와 q 를 양 끝점으로 하는 방향성 선분을 $l(p, q)$ 라고 하고, 방향성 선분 l_i 와 l_j 의 교차점을 $I(l_i, l_j)$ 라고 한다. $Bd(P)$ 의 변들을 순서대로 반 시계방향으로 검색하여 $Bd(P)$ 의 왼쪽

면에 존재하는 반 평면(half-plane)은 P 의 내부의 모든 점들을 포함하고 있으므로 $Int(P)$ 라고 한다. 그러므로 다각형 P 는 $Bd(P)$ 과 $Int(P)$ 로 구성되며 $Bd(P)$ 의 꼭지점들이 모두 볼록 꼭지점일 때 볼록 다각형(convex polygon)이라 한다. $Bd(P)$ 의 두 점 u 와 v 를 가정할 때, $Int(P)$ 에 완전히 포함되는 $l(u, v)$ 을 현(chord) $c(u, v)$ 라고 하고 $Bd(P)$ 의 꼭지점 u 에서 시계 방향으로 꼭지점 v 에 이르는 변의 연속을 체인 $ch(u, v)$, 반 시계 방향의 체인을 $ch^*(u, v)$ 라고 한다. $ch(u, v)$ 를 구성하는 꼭지점들이 모두 볼록 꼭지점이라면 $ch(u, v)$ 는 볼록 체인이라 하고, 모두 오목 꼭지점이라면 오목 체인이라 한다.

점 w 가 $l(u, v)$ 의 모든 점에서 가시적이라면 w 는 $l(p, q)$ 에 대해 강 가시적(strongly visible)이라 하고, $l(u, v)$ 의 한 점 이상에서 가시적이면 w 는 $l(u, v)$ 에 대해 약 가시적(weakly visible)이라 한다[5, 14]. 다각형 내부에 $Bd(P)$ 과 $Int(P)$ 가 동시에 가시적인 점의 집합을 kernel $K(P)$ 라고 하며, $K(P)$ 가 존재하는 다각형을 점 가시적(point visible) 다각형이라 한다. 하나의 변, 선분, 체인에서 $Bd(P)$ 와 $Int(P)$ 가 모두 강 가시적인 다각형을 각각 변 가시적, 선분 가시적, 체인 가시적 다각형이라 한다[13]. 한 점 p 에서 가시적인 $Int(P)$ 와 $Bd(P)$ 의 점들의 집합은 P 에 완전히 포함되는 부분 다각형으로 점 가시성(point visibility) 다각형 $Vis(p)$ 라고 하며, P 와 $Vis(p)$ 가 동일하다면 P 는 점 가시적 다각형이다. 그리고 변 e 에서 가시적인 점들의 집합을 변 가시성 다각형 $Vis(e)$ 이라 하고, 선분 l 에서 가시적인 점들의 집합을 선분 가시성 다각형 $Vis(l)$ 이라 하고, 체인 ch 에서 가시적인 점들의 집합을 체인 가시성 다각형 $Vis(ch)$ 이라 한다. 그리고 가시성 다각형들은 각각 선형시간 내에 구성할 수 있다[10, 14].

다각형의 $Bd(P)$ 의 꼭지점 s 와 t 를 가정할 때 $ch(s, t)$ 의 모든 점들이 $ch^*(s, t)$ 의 한 점 이상에서 가시적이고 동시에 $ch^*(s, t)$ 의 모든 점들이 $ch(s, t)$ 의 한 점 이상에서 가시적이라면 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 는 서로 약 가시적(mutually weakly visible)이라고 한다. 약 가시체인 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 으로 구성된 단순 다각형을 약 가지 다각형 또는 Street이라 한다(그림 1)[7, 8].



(그림 1) 약 가시 체인과 약 가시 다각형

임의의 한 선분이 약 가시 다각형의 내부의 한 점을 지나고 그 선분이 다각형 내부에 완전하게 포함되며 동시에 양 끝점이 약 가시체인 $ch(s, t)$ 와 $ch^*(s, t)$ 에 위치한다면 다각형의 내부는 $ch(s, t)$ 또는 $ch^*(s, t)$ 에 의해 항상 약 가시적이다. 이후로 약 가시 체인을 줄여서 가시 체인이라 하겠다. 경비원은 반드시 다각형 내부에 완전히 포함된 경비원 경로를 따라 이동하며 다각형의 내부를 감시해야 하므로 약 가시 다각형의 내부에 구성되는 경비원 경로는 가시 체인들과 항상 가시적이다.

2.2 약 가시 다각형의 코너 구성

약 가시적 다각형 P 에서 경비원 경로는 반드시 가시 체인의 양 꼭지점인 s 와 t 를 출발점과 도착점으로 선택해야 할 필요는 없다. 경비원 경로가 다각형의 경계가 아닌 내부의 한 점에서 출발하여 진행된다면 꼭지점 s 와 t 를 양 끝점으로 하는 경비원 경로에 비하여 경로의 길이와 진행 과정 등이 단순해 질 수 있다. 다각형의 경계면이 아닌 다각형의 내부에 존재하는 경로의 양 끝점 위치를 결정하기 위하여 다음의 과정들을 제시한다.

약 가시적 다각형을 구성하는 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 의 꼭지점 s 에서 반시계 방향으로 검색하여 만나는 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점을 양 끝점으로 하는 첫 번째 변의 볼록 꼭지점에서 시작하여 오목 꼭지점에서의 방향을 가지고 다각형의 내부로 연장된 방향성 직선을 L_1 이라고 하자. 약 가시 다각형의 가시 체인들은 서로 약 가시적이므로 하나의 가시 체인에서 연장된 L_1 은 반드시 다른 가시 체인 $ch(s, t)$ 과 교차한다. 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 의 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점의 순서로 구성된 변에서 연장된 방향성 직선 L_1, L_2, \dots, L_i 는 다각형의 내부에서 교차할 수 있다 ($i < n$). 만약 $ch^*(s, t)$ 에서 연장된 방향성 직선들이 교차한다면 방향성 직선들의 반 평면 집합을 구성하는 체인을 교차 체인 L_ch 이라고 하자. 같은 방법으로 가시 체인 $ch(s, t)$ 의 꼭지점 s 에서 시계 방향으로 검색하여 만나는 변들 중에서 볼록 꼭지점과 오목 꼭지점을 양 끝점으로 하는 첫 번째 변에서 연장된 방향성 직선을 R_1 이라고 하자. 가시 체인 $ch(s, t)$ 의 변에서 연장된 방향성 직선 R_1, R_2, \dots, R_j 는 다각형의 내부에서 교차할 수 있으므로 ($j < n$), 방향성 직선들의 교차 체인을 R_ch 이라고 하자. 이 경우, L_ch 와 R_ch 는 볼록 체인이므로 L_ch 와 R_ch 의 교차점들은 반드시 볼록 꼭지점들이다. 교차 체인 L_ch 가 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 의 한 점 p 와 $ch(s, t)$ 의 한 점 q 를 끝점으로 하는 체인이라면 L_ch 과 $ch(p, q)$ 는 부분 다각형의 경계를 이루고 있으므로 부분 다각형의 내부를 가시 영역 A_L 이라 한다. 그리고 교차 체인 R_ch 가 가시 체인 $ch(s, t)$ 의 한 점 v 와 가시 체인

$ch^*(s, t)$ 의 한 점 w 를 끝점으로 하는 체인이라면, R_ch 와 $ch(w, v)$ 는 다각형의 내부에 가시 영역 A_R 를 형성한다. 항상 약 가시적인 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 과 $ch(s, t)$ 으로부터 구성된 가시 영역 A_L 과 A_R 는 다각형의 내부에서 반드시 교차하므로 가시 영역들의 교차형태를 다음의 3가지로 구분할 수 있다.

첫째, A_L 이 A_R 에 완전히 포함될 경우(또는 반대 경우)로써 L_ch 가 R_ch 보다(R_ch 가 L_ch 보다) 꼭지점 s 에 더 가까이 위치한다(그림 2)(a). 둘째는 L_ch 와 R_ch 가 한 점에서 교차할 경우(그림 2)(b)이고, 셋째는 두 점 이상에서 교차할 경우이다(그림 2)(c).

(a) 포함관계 (b) 1번 교차 (c) 2번이상 교차

(그림 2) 가시 영역들의 교차 형태

경비원은 경로를 따라 이동하며 다각형의 내부를 지속적으로 감시해야 하므로 양 끝점의 위치를 결정하는 방법에 따라 경비원 경로가 가지는 링크의 수가 달라질 수 있다. (그림 2)에서, 약 가시 다각형 P 의 가시 영역 A_L 과 A_R 이 교차하여 중복되는 영역을 교차 영역 A_s 이라 하고, $Int(P)$ 에 포함되는 A_s 의 $Bd(A_s)$ 를 코너체인 Ws_ch 라고 한다. A_s 의 내부는 볼록 다각형의 특성을 가지게 되며 Ws_ch 에서 강 가시적이므로 경비원 경로는 Ws_ch 의 어떤 점이라도 출발점으로 선택할 수 있다. 상대적으로 가시 체인의 다른 한 꼭지점 t 를 중심으로 구성되는 교차 영역 A_t 의 $Bd(A_t)$ 을 코너체인 Wt_ch 라고 할 때, A_t 의 내부 또한 Wt_ch 에서 강 가시적이며 경비원 경로의 도착점은 Wt_ch 의 어떠한 점이라도 가능하다. (그림 2)(a)의 경우, 경비원 경로는 가시 영역 A_L 과 A_R 의 내부를 모두 감시하기 위하여 A_R 의 경계인 R_ch 까지 진행되어야 한다. 즉, 경비원의 이동 경로와 A_R 에 속한 모든 점들이 서로 약 가시적이 되기 위하여 경비원 경로는 최소한 R_ch 의 한 점까지는 진행해야만 하므로 R_ch 가 코너체인 Ws_ch 가 된다. 교차 체인들이 한 점에서 교차하는 (그림 2)(b)의 경우, 코너체인 Ws_ch 는 2개의 교차 체인이 교차하는 점 r 을 포함하는 $ch(p_1, r) \cup ch(r, q_1)$ 이 된다. 그리고 교차 체인들이 두 점 이상에서 교차하는 (그림 2)(c)의 경우, 코너체인 Ws_ch 는 교차점 r_1 과 r_2 를 양 끝점으로 하는 $ch(r_1, r_2)$ 를 포함하는 $ch(p_1, r_1) \cup ch(r_1, r_2) \cup ch(r_2, q_1)$ 이

된다.

약 가시 다각형에서 경비원 경로가 반드시 방문해야 하는 한계 체인 Ws_ch 를 알고리즘 "Find corner chain"에서 구성한다.

Input 약 가시 다각형의 체인 $ch(s, t)$, $ch^*(s, t)$

Output 코너체인 Ws_ch

단계 1. 초기화 /* (그림 3) 참조 */

- 1.1 $ch^*(s, t)$ 의 변에서 연장된 방향성 직선 집합 $L = \{L_1, L_2, \dots, L_j\}$ 과 $ch(s, t)$ 에서의 방향성 직선 집합 $R = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ 을 구성한다 ($j, k \leq n/4$).
- 1.2 꼭지점 s 에서 시작하여 $ch(s, t)$ 의 첫 오목 꼭지점으로서의 방향성 직선 E_L 을 구성한다.
- 1.3 Push(S_L, L_1 이 시작하는 오목 꼭지점의 좌표) /* 스택 S_L 에 좌표 값을 저장 */
 If (L_1 이 E_L 과 교차하지 않음) Push ($S_L, I(L_1, ch(s, t))$)
 else if ($I(L_1$ 의 시작점 좌표, $I(L_1, E_L)$)이 $ch(s, t)$ 과 교차하지 않음) Push ($S_L, I(L_1, E_L)$)
 else Push ($S_L, I(L_1, ch(s, t))$);
 $ES_L = I(s, S_L[top])$;

단계 2. 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 에서 교차 체인 L_ch 의 구성

- ```

while (L에 검사되지 않은 방향성 직선이 존재) {
 if (I(Li, ESL)의 y좌표값 (SL[top]의 y좌표값) {
 if (I(Li의 시작점, I(Li, ESL))가 ch(s, t)와 교차하지 않음) {
 while (I(SL[top], SL[top-1])이 Li와 교차하지 않음)
 SL[top] 삭제;
 temp = I(Li, I(SL[top], SL[top-1])); SL[top]삭제;
 push (SL, temp); push (SL, I(Li, ch(s, t)));
 }
 else if (Li가 ch*(SL[top], s)와 교차) {temp = I(Li, I(SL[top], SL[top-1])); SL[top] 삭제; push(SL, temp);
 push (SL, I(Li, ch(temp, s)));
 }
 ESL = I(s, SL[top]); } /* while의 끝 */

```

**단계 3. 가시 체인  $ch(s, t)$ 에서 교차 체인  $R\_ch$ 의 구성**:  $R\_ch$ 를 스택  $S_R$ 에 저장

**단계 4. 코너 체인  $Ws\_ch$ 의 구성**

- ```

스택 SM에 Lch와 Rch의 교차점들을 모두 저장
if (SM이 비어있음) { Wsch은 Lch과 Rch 중에서 완전히 포함되는 교차체인으로 결정 }
else { if (SM에 교차점 p 존재) { chL = ch*(SL[top], p);
    chR = ch(SR[top], p); Wsch = chL ∪ chR }
else {
    pivot = 0; Si = SL; Sm = SM; SR의 좌표 값들은 SR에 역순으로 저장;
    if (Sr[top] ⊂ ch(s, Si[top])) pivot = Sr[top] else pivot = Si[top];
    while (Sm[top] ⊄ I(Si[top], Si[top-1])) { chL = chL ∪ I(Si[top], Si[top-1]); Si[top] 삭제 }
    while (Sm[top] ⊄ I(Sr[top], Sr[top-1])) { chR = chR ∪ I(Sr[top], Sr[top-1]); Sr[top] 삭제 }
    if (pivot = Si[top]) { chL = chL ∪ I(Si[top], Sm[top]);
        Wsch = Wsch ∪ chL; Si[top]과 Sr[top] 삭제; Sr[top] = Sm[top]; pivot = right; }
    else { chR = chR ∪ I(Sr[top], Sm[top]); Wsch = Wsch ∪ chR; Si[top]과 Si[top] 삭제; Si[top] = Sm[top]; pivot = left }
    
```

```

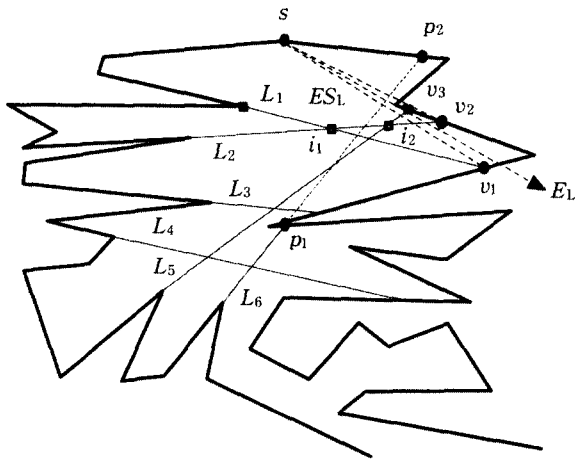
Sm[top] 삭제;
while (Si과 Sr과 Sm이 모두 비어있지 않음) {
    while (Sm[top] ⊄ I(Si[top], Si[top-1])) { chL = chL ∪ I(Si[top], Si[top-1]); Si[top] 삭제 }
    while (Sm[top] ⊄ I(Sr[top], Sr[top-1])) { chR = chR ∪ I(Sr[top], Sr[top-1]); Sr[top] 삭제 }
    if (pivot = left) { chL = chL ∪ I(Si[top], Sm[top]);
        Wsch = Wsch ∪ chL; Si[top]과 Sr[top] 삭제;
        Sr[top] = Sm[top]; pivot = right }
    else { chR = chR ∪ I(Sr[top], Sm[top]); Wsch = Wsch ∪ chR; Si[top]과 Sr[top] 삭제; Si[top] = Sm[top]; pivot = left }
    Sm[top] 삭제 } /* while의 끝 */
} /* else의 끝 */
if (pivot == right) { push (Si, Sr[top]); while (Si ≠ ∅)
    { chL = chL ∪ I(Si[top], Si[top-1]); Wsch = Wsch ∪ chL }
else { push(Sr, Si[top]); while (Sr ≠ ∅) { chR = chR ∪ I(Sr[top], Sr[top-1]); Wsch = Wsch ∪ chR }
}
END
    
```

(Algorithm) Find corner chain

[정리 1] 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 과 $ch(s, t)$ 로 구성된 약 가시 다각형이 주어졌을 때, "Find corner chain" 알고리즘은 경비원 경로가 반드시 방문해야 하는 코너체인 Ws_ch 과 Wt_ch 을 $O(n^2)$ 시간 내에 구성할 수 있다.

증명 단계 1에서, n 개의 꼭지점으로 구성된 약 가시 다각형의 가시 체인 $ch^*(s, t)$ 의 오목 꼭지점에서 연장된 방향성 직선 L_i 는 다각형의 내부를 지나서 $ch(s, t)$ 과 반드시 교차한다(그림 3). 이때 오목 꼭지점은 최소한 2개의 변에 의해 형성되므로 최대 $n/4$ 개의 방향성 직선들을 $O(n)$ 시간에 찾아낼 수 있다. 또한 $ch(s, t)$ 의 방향성 직선 R_i 도 $O(n)$ 시간에 모두 찾아낼 수 있다. 단계 1.3에서 교차점 $I(L_1, ch(s, t))$ 또는 $I(I(L_1$ 의 시작점, $I(L_1, E_L))$, $ch(s, t)$ 는 꼭지점 s 에서 시계방향으로 $O(n)$ 개의 변과 비교함으로써 찾아낼 수 있다. 단계 2에서는 $L_i(2 \leq i < n/4)$ 들을 모두 검사하는 과정을 포함하고 있다. 만약 교차점 $I(L_i, ES_L)$ 의 y좌표 값이 최근에 S_L 에 저장된 교차점의 y좌표 값보다 크다면, L_i 는 S_L 에 저장된 교차점들이 이루는 선분들과 교차하지 않으므로 L_ch 의 구성에서 제외할 수 있다($2 \leq i, ES_L = I(s, v_1)$).

(그림 3)에서처럼 교차점 $I(L_2, ES_L)$ 의 y좌표 값이 S_L 에 저장된 교차점 v_1 의 y좌표 값보다 작다면 L_2 는 ES_L 과 교차하기 이전에 S_L 의 교차점 쌍들이 구성하고 있는 L_ch 의 선분과 먼저 교차한다. 그러므로 이때의 교차점 i_1 을 L_ch 의 구성에 반영하기 위하여 S_L 에 저장하고 ES_L 을 $I(s, v_2)$ 로 수정한다. 만약 L_i 가 ES_L 과 교차하기 전에 $ch(S_L[top], t)$ 과 먼



(그림 3) 교차 체인 L_{ch} 의 구성 형태

저 교차한다면 L_{ch} 의 구성에서 제외되므로 L_i 와 $ch(S_L[top], t)$ 의 교차를 검사하는데 $O(n)$ 의 비교가 필요하다. 만약 L_i 가 $ch(S_L[top], t)$ 과 교차하지 않고 ES_L 보다 $ch(s, S_L[top])$ 와 먼저 교차한다면, 부분적으로 구성되어 있는 L_{ch} 와 L_i 의 교차점과 $ch(s, S_L[top])$ 과 L_i 의 교차점을 S_L 에 저장되어 있는 좌표 값들과 교체한다. 그러므로 L_{ch} 를 구성하는 과정은 $O(n)$ 개의 교차점들을 모두 비교하는 과정을 포함하고 있다. 예를 들면, (그림 3)의 L_5 가 $ch(S_L[top], t)$ 과 교차하지 않고 ES_L 보다 $ch(s, S_L[top])$ 와 먼저 교차하므로 S_L 에 저장되어 있는 v_2 를 제거하는 대신에 교차점 i_2 와 u_3 을 저장함으로써 L_{ch} 의 구성을 진행한다. 이와 같이 ES_L 과의 교차점의 y좌표 값이 스택 S_L 에 저장된 교차점의 y좌표 값보다 작은 L_i 의 개수를 m 이라고 할 때 m 은 당연히 $n/4$ 보다 작으므로 단계 2에서 $ch^*(s, t)$ 에서 시작하는 L_{ch} 을 구성하기 위하여 필요한 시간은 $O(mn)$ 시간이면 충분하다.

단계 3에서는 단계 2와 같은 방법으로 $O(mn)$ 시간 내에 $ch(s, t)$ 에서 시작하는 R_{ch} 을 구성할 수 있다. 단계 4에서는 L_{ch} 과 R_{ch} 를 구성하고 있는 교차점의 수를 각각 m_L, m_R 이라 가정하면, L_{ch} 과 R_{ch} 의 교차 여부를 검사하여 한 교차체인이 다른 교차체인을 완전히 포함하고 있는 경우와 교차체인들이 한 점에서 교차할 경우의 코너체인 Ws_{ch} 을 구성하는 과정은 $O(m_L + m_R)$ 시간이 필요하다. 즉, 각 교차체인의 교차점 개수인 m_L 과 m_R 이 다각형의 꼭지점 개수인 n 을 절대로 넘지 않으므로 $O(n)$ 시간이다. 그리고 두 점 이상에서 교차할 경우 교차점들을 모두 검색해야 하므로 Ws_{ch} 를 구성하는 데에는 $O(m_L \times m_R)$ 시간이 필요하다. 알고리즘 "Find corner chain"에서 방향성 직선들의 교차점들을 연결한 L_{ch} 와 R_{ch} 는 불록 체인이며 이 체인들의 교차를 비교, 검색하여 교차점들을 재구성하여 구성된 코너체인 Ws_{ch} 도 불록 체인의 특성을 가진다. 전체적으로 알고리즘

"Find corner chain"은 약 가시 다각형의 경비원 경로가 방문해야 하는 최소한의 영역을 의미하는 코너체인 Ws_{ch} 을 $O(n^2)$ 시간 내에 구성할 수 있다. □

3. 최소 링크를 가진 경비원 경로

다각형 내부에서 경비원의 가시성을 방해하는 요소는 내부로 돌출한 오목 꼭지점들이다. 약 가시 다각형 P 에서 가시성 다각형 $Vis(Ws_{ch})$ 와 Wt_{ch} , 또는 $Vis(Wt_{ch})$ 와 Ws_{ch} 가 한 점 이상에서 교차한다면 Ws_{ch} 와 Wt_{ch} 는 서로 가시적이다. 이때 Ws_{ch} 의 한 점과 Wt_{ch} 의 한 점을 연결하는 선분 l 이 반드시 존재하며 다각형의 내부가 l 에 가시적이므로 P 는 선분 가시 다각형이다. 즉, $Vis(Wt_{ch})$ 에 포함된 Ws_{ch} 의 부분 체인 ch_k 를 가정할 때 ch_k 의 양 끝점을 u_s 와 w_s , 그리고 $Vis(Ws_{ch})$ 에 포함된 Wt_{ch} 의 부분 체인 ch_t 의 양 끝점을 u_t 와 w_t 라 할 때 u_s 와 w_t , u_t 와 w_s 는 서로 가시적이므로 링크의 개수가 1인 경비원 경로는 반드시 존재한다(그림 4(a)). 만약 Ws_{ch} 와 Wt_{ch} 가 서로 비가시적이라면 $Vis(Ws_{ch})$ 의 경계선을 구성하고 있는 2개의 체인 $ch(s, p)$ 과 $ch(p, s)$ 가 존재한다. (그림 4(b)에서 기준점 m_s 는 Ws_{ch} 와 Wt_{ch} 의 사이를 왕복해야 하는 경비원 경로가 경유하는 위치정보를 결정하는 꼭지점으로 Ws_{ch} 와 Wt_{ch} 사이의 가시성을 방해하는 오목 꼭지점들 중의 하나이다. (그림 4(c)에서 점 p 는 s 에서 시계방향으로 $ch(s, t)$ 의 점들을 검색할 때 만날 수 있는 $Vis(Ws_{ch})$ 의 꼭지점들 중에서 마지막 순서의 불록 꼭지점이다. 이 경우 $Vis(Ws_{ch})$ 를 구성하고 있는 $ch^*(s, p)$ 의 꼭지점들 중에서 마지막 순서의 오목 꼭지점이 존재하며, 이 꼭지점은 약 가시 다각형 P 에서 $Vis(Ws_{ch})$ 를 제외한 나머지 다각형 P' 과 인접하는 유일한 오목 꼭지점으로 기준점 m_s 가 된다. 만약 p 가 m_s 처럼 오목 꼭지점일 경우에는 p 가 기준점이 된다. 현 sc 는 $Vis(Ws_{ch})$ 의 경계를 구성하고 있는 선분들 중에서 $ch(s, t)$ 과 $ch^*(s, t)$ 를 연결하는 유일한 선분으로 기준점 m_s 를 포함하고 있으며 Wt_{ch} 와 Ws_{ch} 사이를 진행하는 경비원 경로와 반드시 교차하게 된다. 그러므로 Ws_{ch} 와 Wt_{ch} 가 서로 비가시적이며 $Vis(Ws_{ch})$ 와 $Vis(Wt_{ch})$ 가 부분적으로 교차하는 다각형은 하나 또는 두 개의 기준점을 가지며, $Vis(Ws_{ch})$ 와 $Vis(Wt_{ch})$ 가 전혀 교차하지 않는 다각형은 반드시 두 개의 기준점을 가진다.

경로를 따라 이동하는 경비원은 $Vis(Ws_{ch})$ 와 $Vis(Wt_{ch})$ 는 물론이고 두 영역 사이의 모든 부분을 경로 상에서 감시할 수 있어야 한다. 최소링크의 경비원 경로를 구성하는 개략적인 과정은 Ws_{ch} 와 Wt_{ch} 의 가시적 특성을 이용하여 다각형 P 를 점이나 선분으로부터 가시적인 영역들로

(a) 선분 가시적 (b) 기준점 1개 (c) 기준점 2개
(그림 4) 약 가시 다각형의 기준점

분할하며 인접한 영역들은 당연히 링크가 1인 경로들을 가진다. 그리고 분할된 가시 영역들을 그래프로 표현한 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성한 후, $G(P)$ 에서 최소 링크의 경비원 경로를 구한다. 최소 링크의 경비원 경로를 구하는 세부적인 과정은 다음과 같다.

약 가시 다각형 P 에서 코너체인 Ws_ch 와 Wt_ch 가 서로 비가시적이라면 기준점 m_s 와 m_t 가 각각 존재하므로 적어도 2 이상의 링크를 가진 경비원 경로가 존재한다. $Bd(Vis(Ws_ch))$ 를 구성하는 변 중에서 양 끝점이 각각 $ch(s, t)$ 와 $ch^*(s, t)$ 에 속하며 기준점 m_s 를 포함하고 있는 변을 가시현(visible chord) sc_1 이라고 한다. P 에서 $Vis(Ws_ch)$ 를 제외한 부분 다각형 $P_s[1]$ 은 Wt_ch 를 포함하고 있으며 $P_s[1]$ 에서 가시성 다각형 $Vis(sc_1)$ 를 제거한 부분 다각형을 $P_s[2]$ 라고 하고, 부분 다각형 $P_s[2]$ 를 형성할 때 추가되는 현을 sc_2 라고 한다. 연속된 과정으로 구성된 $Vis(sc_{i-1})$ 를 $P_s[i-1]$ 에서 제외한 부분 다각형 $P_s[i]$ 에 추가된 현을 sc_i 라고 하며, sc_i 와 Wt_ch 는 서로 가시적이다($1 < i < n/4$). 상대적으로 $Vis(Wt_ch)$ 의 변 중에서 기준점 m_t 를 포함하고 있는 변을 tc_1 이라 한다. P 에서 $Vis(Wt_ch)$ 를 제외한 부분 다각형 $P_t[1]$ 은 Ws_ch 를 포함하고 있으며, $P_t[1]$ 에서 tc_1 의 가시성 다각형 $Vis(tc_1)$ 를 제외한 부분 다각형을 $P_t[2]$ 라고 하고, $P_t[2]$ 에 새로 추가되는 현을 tc_2 라고 한다.

같은 연속된 과정에 의해 구성된 $Vis(tc_{j-1})$ 를 부분 다각형 $P_t[j-1]$ 에서 제거함으로써 형성되는 부분 다각형 $P_t[j]$ 에 추가된 현을 tc_j 라고 하며, tc_j 와 Ws_ch 는 서로 가시적이다($1 \leq j < n/4$). 이때 현 sc_i 는 Wt_ch 와 서로 가시적이므로 sc_i 는 tc_i 과 반드시 한 점에서 교차하고, 또한 tc_j 는 sc_j 과 반드시 한 점에서 교차한다. 그러므로 다각형 P 에서 현 집합 $SC = \{sc_1, \dots, sc_i\}$ 와 $TC = \{tc_1, \dots, tc_j\}$ 를 구성하는 현의 개수는 같다($i = j$). 서로 교차하는 SC 의 현과 TC 의 현의 쌍 $(sc_i, tc_j), (sc_2, tc_{j-1}), \dots, (sc_i, tc_1)$ 들이 다각형 P 의 경계선과 교차하여 형성하는 영역을 교차영역 ia 라고 하면, Ws_ch

와 Wt_ch 가 서로 비가시적인 약 가시 다각형은 2개 이하의 기준점을 가지므로 1개 이상의 교차영역이 존재하고, 또한 교차영역의 집합 $IA = \{ia_1, ia_2, \dots, ia_n\}$ 를 형성할 수 있다. 교차영역의 수는 SC 또는 TC 를 이루는 현의 개수와 같으며 인접한 교차영역들은 서로 가시적이다(그림 5(a)[17, 18]). 약 가시 다각형에서 Ws_ch 와 Wt_ch 를 제외한 교차 영역들을 i 개의 노드로 표현하고 교차 영역들을 제외한 나머지 부분 다각형들을 노드를 연결하는 변으로 표현하면, 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성할 수 있다. 이때 Ws_ch 를 근 노드로, Wt_ch 를 단말 노드로 사용하는 $G(P)$ 는 연속된 순서의 교차 영역들을 내부 노드로 가지는 트리의 성질을 가지므로 근 노드에서 단말 노드까지의 경로는 최소 개수의 변으로 연결된다(그림 5(b)). 이때의 경로는 P 의 내부에서 구성된 최소 링크를 가진 경로로 구성될 수 있다(그림 5(c)).

(a) 교차영역 (b) 가시성그래프 (c) 경비원 경로
(그림 5) 최소링크의 경비원 경로

Ws_ch 과 Wt_ch 가 서로 비가시적인 약 가시 다각형에서 최소링크를 가진 경비원 경로를 $O(n)$ 시간에 구할 수 있는 알고리즘을 제시한다.

입력: 약 가시 다각형 P 의 Ws_ch 과 Wt_ch
 출력: 최소링크의 경비원 경로
 단계 1: 코너체인들을 이용하여 구성된 가시 현들에서 교차 영역의 집합을 구성한다.
 단계 2: 교차영역과 함께 분할된 부분 다각형들을 가시성 그래프 $G(P)$ 로 변환한다.
 단계 3: 경비원 경로 ← $G(P)$ 의 근 노드에서 단말 노드까지의 경로.

(알고리즘: 경비원 경로 찾기)

[정리 3.1] 알고리즘 “경비원 경로 찾기”는 주어진 약 가시 다각형에서 최소 링크의 경비원 경로를 $O(n)$ 시간에 구성할 수 있다.

증명 단계 1에서 Ws_ch 과 Wt_ch 의 가시성 다각형과 가

시 현들의 가시성 다각형을 구성하기 위하여 $O(n)$ 의 시간이 필요하다. 전 처리 과정으로 다각형 P 의 내부를 삼각화하여 변의 가시성 다각형이나 체인의 가시성 다각형을 구하는 시간을 $O(n)$ 에서 $O(t)$ 로 줄일 수 있다. 이때 t 는 변 또는 체인 가시성 다각형에 의해 교차되는 삼각형의 개수이다. 그리고 $\Sigma(t) = O(n)$ 이므로 하나의 가시 현에서 다음 순서의 가시 현을 반복적으로 구성하는 과정은 $O(n)$ 시간 내에 수행할 수 있다[15]. 단계 2에서 P 의 내부에서 연속적인 순서로 존재하는 교차영역들을 노드로 변환하고 교차 영역들을 제외한 나머지 부분 다각형들은 노드들을 연결하는 변으로 변환시킴으로써 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성할 수 있으므로 $G(P)$ 는 $O(n)$ 시간에 구성할 수 있다. 그리고 단계 3에서 $G(P)$ 를 구성하고 있는 노드의 수는 다각형을 이루는 꼭지점의 개수인 n 에 비해 훨씬 적으므로 $O(n)$ 시간에 최소링크의 경비원 경로를 구할 수 있다.

그러므로 알고리즘 “경비원 경로 찾기”는 약 가시 다각형의 코너체인 Ws_ch 와 Wt_ch 가 주어졌을 때 경로 상에서 다각형 내부를 모두 감시할 수 있는 최소 링크의 경비원 경로를 $O(n)$ 시간에 구성할 수 있다. 또한 교차 체인, 가시성 다각형 $Vis(Ws_ch)$ 와 $Vis(Wt_ch)$, 그리고 교차영역들을 위한 $O(n)$ 의 공간이 추가로 필요하다. □

4. 결 론

경비원 경로 문제는 경로의 길이를 최소화시키는 문제에 대한 연구가 주로 이루어져 왔다. 본 논문에서는 n 개의 꼭지점을 가진 약 가시 다각형의 내부를 경로 상에서 모두 감시할 수 있는 최소링크의 경비원 경로를 $O(n^2)$ 시간에 구하는 알고리즘을 제시하였다. 2개의 가시 체인 $ch(s, t)$ 와 $ch^*(s, t)$ 로 구성된 약 가시 다각형의 내부에서 경비원의 출발 위치를 포함하는 코너체인들을 $O(en)$ 시간 내에 구성하고, 코너체인의 가시성 다각형을 이용하여 가시 현들을 결정한다. 이때 e 는 코너체인을 구성할 때 $ch(s, t)$ 또는 $ch^*(s, t)$ 와의 교차를 검색해야 하는 방향성 선분의 개수로서 $n/4$ 개를 넘지 않는다. 그리고 가시 현의 집합을 구하여 2개의 가시 현들이 교차하여 생성되는 교차영역의 집합을 이용하여 약 가시 다각형을 부분 다각형들로 분할한다. 이로써 2개의 코너체인을 각각 근 노드와 단말 노드로 하며, 교차영역들을 내부 노드로 가지는 가시성 그래프 $G(P)$ 를 구성하였다. $G(P)$ 의 근 노드에서 단말 노드까지의 경로를 선형 시간에 구함으로써 최소링크의 경비원 경로를 구성하였다. 주어진 공간을 일정한 속도로 이동하면서 공간의 내부를 모두 감시하는 자동경비 시스템을 가정할 때 최단 경로는 진행 방향의 전환이 많아지므로 제어의 복잡성이나 시

간적인 측면에서 볼 때 최소링크의 경비원 경로가 더 실용적이라 할 수 있다. 그리고 송·수신 측이 서로 가시적일 경우를 요구하는 마이크로파 네트워크에서 리피터의 위치 등을 설정하는 문제 등에 활용될 수 있다. 향후 연구과제는 약 가시 다각형에서 최단 경비원 경로를 구하는 문제나 단순 다각형에서 최소링크의 경비원 경로를 구하는 문제 등을 고려할 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] A. Aggarwal, *The art gallery theorem : its variations, applications, and algorithmic aspects*, Ph. D. thesis, Johns Hopkins Univ., 1984.
- [2] W. P. Chin and S. Ntafos, “Optimum watchman route,” *Info. Proc. Lett.*, Vol.28, pp.39-44, 1988.
- [3] W. P. Chin and S. Ntafos, “Shortest watchman routes in simple polygons,” *Discrete Comput. Geometry*, Vol.6, pp. 9-31, 1991.
- [4] V. Chvátal, “A combinatorial theorem in plane geometry,” *J. Combin. Theory ser. B*, Vol.18, pp.39-41, 1975.
- [5] J. I. Doh and K. Y. Chwa, “An algorithm for determining internal line visibility of a simple polygon,” Report no. CS-TR-88-33, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 1988.
- [6] H. Edelsbrunner, J. O'Rourke, and E. Welzl, “Stationing guards in rectilinear art galleries,” *Comput. vision, Graphics, and Image Process.* Vol.28, pp.167-176, 1984.
- [7] P. J. Heffernan, “An optimal algorithm for the two guard problem,” *Proc. 9th ACM Symp. on Computational Geometry*, pp.348-358, 1993.
- [8] C. Icking and R. Klein, “The two guards problem,” *Proc. 7th ACM Symp. on Computational Geometry*, pp.166-175, 1991.
- [9] S. H. Kim, *Visibility algorithms under distance constraint*, Ph.D. dissertation, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 1994.
- [10] S. H. Lee and K. Y. Chwa, “Some chain visibility problems in a simple polygon,” *Algorithmica*, Vol.5, pp.485-507, 1990.
- [11] W. Lenhart, R. Pollack, J. R. Sack, R. Seidel, M. Sharir, S. Suri, G. Toussaint, S. Whitesides, and C. Yap, “Computing the link center of a simple polygon,” *Discrete Comput. Geom.*, Vol.3, pp.281-293, 1988.
- [12] B. J. Nilsson, *Guarding Art Galleries- Methods for Mobile Guards*, Ph. D. thesis, Lund Univ., 1995.
- [13] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, NewYork, 1987.
- [14] S. Y. Shin, “Visibility in the plane and its related problems,” Ph. D. dissertation, Michigan Univ., 1986.

[15] S. Suri, "On some link distance problems in a simple polygon," IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol.6, pp.108-113, 1990.

[16] 류상률, 서대화, 김승호, "단조 다각형에서 최단 경비원 경로를 구하는 알고리즘", 정보과학회논문지, 제23권 제3호, pp. 244-258, 1996.

[17] 류상률, 김승호, "단조 다각형에서 최소링크를 가진 경비원 경로를 구하는 최적 알고리즘", 정보과학회논문지, 제24권 제 2호, pp.122-130, 1997.

[18] 류상률, "약 가시성 다각형에서 최소링크를 가진 최단 경비원 경로를 구하는 알고리즘", 정보과학회논문지, 제29권 제5·6 호, pp.274-283, 2002.

류 상 른

e-mail : rsr@chungwoon.ac.kr

1988년 경북대학교 전자공학과 졸업
(공학사)

1990년 경북대학교 대학원 컴퓨터 공학과
졸업(공학석사)

1997년 경북대학교 대학원 컴퓨터 공학과
졸업(공학박사)

1998년~2001년 청운대학교 컴퓨터과학과 전임강사

2001년~현재 청운대학교 컴퓨터과학과 조교수

관심분야 : 알고리즘 및 계산이론, 멀티미디어 등