

변형된 PEM 그래디언트 알고리즘을 이용한 디지털화상처리에 관한 연구

송 민 구[†]

요 약

PEM 알고리즘은 페널티 함수가 초월함수 형태일 때에는 반복알고리즘을 전개할 수 가 없다. 하지만, OSL 알고리즘은 복잡한 초월함수 형태의 페널티 함수가 주어지더라도 쉽게 반복 알고리즘이 유도되는 장점을 갖는다. 그러나 이 알고리즘은 페널티 로그-우도를 증가시키는 평활상수의 수렴영역이 제한적이어서 디지털 화상복원시 다양한 평활상수 값을 부여할 수 없기 때문에 최적의 복원화상을 얻을 수 가없다. 본 논문에서는 OSL 알고리즘의 단점을 해결하기 위해서, 수렴 허용 범위가 확대된 평활상수를 갖는 알고리즘을 제시하고 그 수렴성질을 밝히며, 화상실험을 통해 제안된 알고리즘의 유용성을 밝힌다.

A Study of Digital Image Restoration for Modified PEM Gradient Algorithm

Min-Koo Song[†]

ABSTRACT

PEM algorithm cannot expend repeated algorithm, if penalty function is transcendental function. However, OSL algorithm has an advantage that repeated algorithm is easily derived, even though penalty function which has a complicated transcendental function. In spite of this advantage, this algorithm is restricted in convergence region of smoothing constant which increase penalized log-likelihood, so we cannot get the optimal image restoration because it cannot provide us with a various smoothing constant value for the digital image restoration.

In this paper, in order to resolve the disadvantage of OSL algorithm, we would like to suggest the algorithm with smoothing constant enlarge the tolerance limit range of convergence and to find not only properties of its convergence but also usefulness of suggested algorithm through digital image simulation.

1. 서 론

일반적으로 디지털 화상이란 화면을 화소(pixel)라고 불리는 작은 이산 적인 점으로 분할해서, 각 화소에서 농담(濃淡)을 이산 적인 값으로 표현한 것이다. 그런데 일반적으로 관측된 화상에는 여러 가지 종류의 잡음이 나 찌그러짐이 포함되어 있다. 화상이 가진 정보를 인

간에게 보기 쉽게 하거나, 화상을 어떤 표준적인 모양으로 변환해서, 특징의 추출이나 인식이 용이하게 되도록 하는 것이 화상처리의 주요 목적일 것이다. 이러한 처리는, 화상해석 및 인식에서는 보통 전처리(pre-processing)라고 불리며, 콘트라스트이 강조, 잡음제거, 기하학적 찌그러짐의 보정 등이 포함된다. 전처리에서의 대표적인 수법에는 농도변환이나 기하학적 변환 등이 있고, 통계적 모형에 의거한 화질개선 방법인 디지털 화상복원 있다. 본 논문에서는 디지털 화상복원 문

[†] 정 회 원 : 동국대학교 컴퓨터 정보통신공학부 강사
논문접수 : 1999년 3월 19일, 심사완료 : 2000년 1월 10일

제를 중심으로 연구한다.

디지털 화상 복원이란 실제 물체를 영사기 등의 매체로 기록하는 과정에서 여러 가지 원인에 의해 왜곡된 화상이 관측되게 된다. 그런데 실물을 진화상(true image)이라 할 때 진화상을 오염시키는 요소로는 퍼짐 효과(blur effects)와 잡음 효과(noise effects)의 두 가지를 고려할 수 있다. 퍼짐 효과란 피사체의 불완전성에 기인하여 나타나는 현상으로서 영사기의 초점이 맞지 않아 흐릿한 화상이 기록되는 경우이고, 잡음 효과란 먼지나 연기 등의 장애물에 의해 빛이 산란하여 나타나는 현상이다. 디지털 화상 복원이란 퍼짐 효과와 잡음 효과 등에 의해 오염된 불완전한 화상을 기초로 진화상을 추정하는 것이다. 즉 N 개의 독립 관측 화소의 집합인 관측 화상 y 를 사용하여 P 개의 화소를 갖는 진화상 θ 를 추정하는 것이라 볼 수 있다. 하지만 이 경우의 문제점은, 첫째 즉 관측 및 진화상의 크기가 거의 비슷하다는 것이며, 둘째 P 는 진화소의 추정치를 동시에 계산할 수 없을 정도로 매우 크다는 것이다.

첫 번째 조건으로 인하여 추정화상의 분산이 크기 때문에 다소의 잡음이 포함된 관측화상에 대한 복원화상은 매우 불안정한 상태를 나타내게 된다. 이 점을 해결하기 위해서 대수우도에 페널티를 도입한 페널티 대수우도(penalized log-likelihood) 방정식

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{L(\theta) - \lambda J(\theta)\} = 0 \quad (1.1)$$

의 최대페널티 대수우도 추정량(maximum penalized log-likelihood estimator)을 사용할 수 있을 것이다. 단, $g(y|\theta)$ 와 $L(\theta) = \ln g(y|\theta)$ 는 y 의 밀도함수 및 대수우도는 이며, $J(\theta)$ 는 화상의 경계를 보존하면서 잡음을 평활 하도록 고안된 페널티 함수이다. 그리고 상수 $\lambda > 0$ 는 해상도와 잡음의 정도에 따라 실험자가 경험적으로 결정하는 값이다.

두 번째 제한은 방정식 (1.1)으로부터 해를 직접 계산할 수 없게 한다. 그 주된 이유는 해를 얻기 위해서는 $P \times P$ 의 크기를 갖는 역행렬 계산이 요구되기 때문이다. 이 문제점에 대한 대표적 해결방법으로 Geman과 Geman(1984)의 깁스샘플링(gibbs sampling)방법이나, Besag(1986)의 ICM(iterative coding method), 그리고 Abdalla와 Kay(1990)의 ICM과 EM 알고리즘을 결

합한 방법 등이 있다[1, 2, 4].

한편, EM 알고리즘은 우리가 표본자료라고 말하는 관측된 자료는 완전자료(complete data)의 관측 가능한 함수(observable function)로 취급 할 수 있다는 점을 이용하여 불완전 자료에 대한 반복적인 추정 기법이라 볼 수 있다. 그런데, 문제는 이 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 것이다. Lange, Bahn 그리고 Liffle(1987)은 EM 알고리즘의 수렴속도를 향상시키기 위해서 EM 알고리즘의 변형인 EMS(expectation maximization and search) 알고리즘을 제안하여, 수렴속도를 향상시키는 하였으나 반복간의 처리시간을 줄이지는 못하였다. 따라서 모수에 관한 사전정보(prior information)를 알고 있는 화상복원인 경우에는, 대수우도에 페널티를 부여하는 PEM(penalized EM)알고리즘을 사용하면 복원화상의 화질 과 수렴속도를 향상시킬 수 있을 것이다. 그러나 PEM 알고리즘은 페널티 함수가 θ 에 대해서 전개되지 않는 초월함수 형태일 경우에는 사용할 수가 없다. 이것을 해결하기 위해서 Green(1990a)은 PEM 알고리즘의 M-단계에서 근사 해를 제공하는 OSL(one-step-late) 알고리즘을 제시하였다[5]. 이 알고리즘의 가장 큰 장점은 페널티 함수의 1차 미분 전개 가능 여부에 관계없이 반복 알고리즘이 유도되며, 수렴할 때에는 PEM 알고리즘과 같은 정상점(stationary point)에 수렴한다는 것이다. 그러나 PEM 알고리즘이 평활상수 λ 의 크기에 상관없이 수렴하는 반면, OSL 알고리즘은 λ 값의 크기에 민감하게 수렴한다[6]. 이 사실은 오염도가 높은 화상인 경우의 복원에는 비교적 큰 λ 값이 요구되나 수렴영역이 좁기 때문에 폭넓은 λ 값을 부여할 수 없으므로 OSL 알고리즘을 사용할 수 없음을 의미한다.

한편, Lange(1995)는 M-단계에서 모수벡터 θ 에 대한 전개가 극히 어려운 경우와 EM 알고리즘의 수렴속도가 매우 느리다는 점에 착안하여 이를 보완하기 위하여 각 M-단계에서 「뉴튼」 알고리즘의 1단계 추정치를 사용하는 EM 그라디언트 알고리즘을 제안하였다[8]. 이 알고리즘은 M-단계를 전개하기가 편리하고, 평가함수의 2차 미분행렬 즉 헤이지안(Hessian) 행렬이 대각행렬 이어서 역행렬 계산이 매우 간단하다. 따라서 본 논문에서는 OSL 알고리즘의 장점을 그대로 유지하면서 이 알고리즘의 수렴이 λ 에 민감하게 의존하는 단점과 평가함수 전개의 어려움을 동시에 해결하기 위하여, OSL, PEM 및 EM 그라디언트 알고리즘을

이용하여, 수렴 구간이 $\lambda > 0$ 인 변형된 PEM 그라디언트(Modified PEM Gradient : MPEMG) 알고리즘 제안하며, 이 알고리즘의 헤이지안 행렬의 역행렬을 효율적으로 계산하기 위한 방안을 강구한다. 2장은 EM 알고리즘의 개념 및 종류를 설명하고, 3장은 MPEMG 알고리즘의 이론적인 전개 및 수렴성질을 밝힌다. 4장에서는 화상실험을 통하여 제안된 알고리즘의 유용성을 보이고, 5장에서는 결론을 도출한다.

2. EM 알고리즘

EM(expectation maximization)알고리즘은 불완전 자료(incomplete data)에 대하여 최우추정치를 반복적으로 구하는 방법이다[3]. 우리가 표본 자료라고 말하는 불완전 자료 y 는 완전자료 x 의 관측 가능한 함수로 취급할 수 있다. 따라서 완전자료와 관측된 불완전 자료와의 관계를

$$y_i = y(x) = y(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (2.1)$$

와 같은 함수관계로 나타낼 수 있으며, 이들의 관계를 확률밀도함수를 사용하여 구체적으로 표현하면 다음과 같이

$$g(y|\theta) = \int_{\{x: y(x)=y\}} f(x|\theta) dx. \quad (2.2)$$

나타낼 수 있다. 여기서, $g(y|\theta)$ 는 관측치 y 의 확률밀도함수이고, $f(x|\theta)$ 는 완전자료 x 의 확률밀도함수이다.

한편 완전자료의 대수우도 $L(\theta) = \ln f(x|\theta)$ 라 하면, 완전자료 x 는 관측할 수 없는 자료이므로 $L(\theta)$ 을 직접 결정하지 못한다. 단지 불완전 자료 y 가 주어졌을 때, 기대값으로 간접평가 할 수 있을 뿐이다. 그래서 다음과 같은 완전자료 대수우도에 대한 조건부 기대값을 평가함수(evaluation function)라 한다.

$$Q(\theta|\theta^n) = E[\ln\{f(x|\theta)\}|y, \theta^n]. \quad (2.3)$$

여기서, θ^n 는 모수 θ 의 n 시점에서의 추정치 이고, $\ln f(x|\theta) = l(\theta|x)$ 는 완전자료의 대수우도이다. 일반적으로 EM 알고리즘을 E 단계와 M 단계인 두 단계로 구분해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

- E-단계(expectation step)

: 평가함수 $Q(\theta|\theta^n) = E[\ln\{f(x|\theta)\}|y, \theta^n]$ 을 구한다.

- M-단계(maximization step)

: 평가함수 $Q(\theta|\theta^n)$ 을 최대화하는 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 구한다.

한편, 평가함수가 모든 θ 의 영역에서 미분 가능하면 $\frac{\partial}{\partial \theta} Q(\theta|\theta^n) = 0$ 에서 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 구할 수 있다. 이때 PEM 알고리즘은 식(1.1)대신 n 번째 스텝에서

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta)\} = 0 \quad (2.4)$$

을 최대화시키는 $\theta = \theta^{n+1}$ 을 반복적으로 구함으로써 식 (1.1)의 해에 수렴하게 된다. 그런데 디지털 화상분석에서 자주 페널티 함수의 1차 미분인 $\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta)$ 항이 θ 에 대해 전개되지 않음으로써 PEM 알고리즘의 사용을 불가능하게 한다. 이를 극복하는 대안으로서 Green(1990a)은 방정식 (2.4) 대신

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{Q(\theta|\theta^n) - \lambda J(\theta^n)\} = 0 \quad (2.5)$$

을 사용하는 OSL 알고리즘을 제안하였다. 위 두 식의 차이는 불균일도 페널티의 도함수가 새 대체값 θ 가 아닌 현 상태값(current value) θ^n 에서의 도함수 값이라는 것이다. 그래서 이 알고리즘을 OSL(one-step-late) 알고리즘이라고 부르기로 한 것이다. 이 알고리즘을 구상한 동기는 목적함수가 현 모수추정치에 선형일 때 EM 알고리즘은 그라디언트(gradient) 알고리즘과 매우 흡사하다는 것이며, 알고리즘이 느리게 수렴하면, $DJ(\theta^n)$ 와 $DJ(\theta)$ 는 거의 차이가 없다는 것이다. 여기서, D 는 도함수를 의미한다. 또한 $\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta)$ 항의 전개가능 여부에 관계없이 반복 알고리즘이 유도되며, 이 알고리즘이 수렴할 때는 PEM 알고리즘과 같은 정상점(stationary point)에 수렴한다는 점이다. 그렇지만 서론에서도 지적하였듯이 OSL 알고리즘은 λ 의 수렴범위 좁다는 단점을 가진다.

한편, EM알고리즘의 M-단계에서 모수벡터 θ 에 대한 전개의 어려움을 해결하기 위한 방법으로 Lange은 식(2.4)의 그라디언트 알고리즘을 제안하였다[8]. 그는 EM 알고리즘의 수렴 속도가 거의 선형적이라는 점에 착안하여, 각 M-단계에서 「뉴턴」알고리즘의 1-단계 추정치를 사용하는 식(2.6)과 같은

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^2 Q(\theta^n|\theta^n)\}^{-1} D^1 Q(\theta^n|\theta^n) \quad (2.6)$$

알고리즘을 구성하였다. 여기서, $D^i f(x|y) = \partial^{i+j} f(x|y) / \partial x^i \partial y^j$ 을 나타낸다. EM 그래디언트 알고리즘의 장점의 첫째는 M-단계에서 θ^{n+1} 을 구하기 위해 복잡한 $D^{10} Q(\theta^n | \theta^n) = 0$ 을 전개할 필요가 없다는 것이고, 둘째는 대부분의 문제에서 $D^{20} Q(\theta^n | \theta^n)$ 은 역행렬의 계산이 간단한 대각행렬이라는 것이다.

3. 변형된 PEM 그래디언트 알고리즘

서론에서 언급한 OSL 알고리즘의 문제점을 해결하기 위하여 본 논문에서는 식 (2.4)의 PEM 알고리즘을 Lange(1995)의 그래디언트 형태로 표현한 식(3.1)과 같은 MPEMG 알고리즘을 제안한다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{D^{20} Q_P(\theta^n | \theta^n)\}^{-1} D^{10} Q_P(\theta^n | \theta^n). \quad (3.1)$$

여기서, $L_P(\theta) = L(\theta) - \lambda J(\theta)$ 이고, $Q_P(\theta | \theta^n) = Q(\theta | \theta^n) - \lambda J(\theta)$ 이다. 제안된(3.1)의 알고리즘을 사용하면 평가함수 Q 와 페널티 함수 J 에서 동시에 기인하는 θ 에 대한 전개상의 어려움을 피할 수 있을 것이다. 그런데 이 알고리즘을 사용하는 데는 제한이 따른다. 왜냐하면, 항행렬(directional matrix)

$$D^{20} Q_P(\theta^n | \theta^n) = D^{20} Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda D^2 J(\theta^n) \quad (3.2)$$

가 대각행렬이 아니기 때문이다. 사실 디지털 화상관련 분야의 대부분의 문제에서 식 (3.2)의 우변은 대각행렬로 정의되는 반면 페널티 함수의 2차미분인 $D^2 J(\theta^n)$ 은 비대각행렬로 이루어진다. 따라서 식(3.2)의 항행렬의 역행렬을 구해야 하는데, 일반적으로 디지털 화상 복원에서는 이 항행렬의 차수가 매우 크므로 역행렬의 계산에 대단한 어려움이 따른다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위해 보조정리 1을 제안하였고 이것을 이용하여 정리 1의 알고리즘을 구성하여 항행렬의 역행렬 계산의 문제점을 극복하고자 한다.

보조정리 1. $(A - \lambda B)^{-1} = E(I - \lambda \Lambda)^{-1} E^T$ 이다.

여기서, A 는 대각행렬, B 는 대칭행렬, I 는 단위행렬, $A^{-1/2} B A^{-1/2} = \Gamma \Lambda \Gamma^T$ 일 때 Λ, Γ 는 이것의 고유치들로 이루어진 대각행렬 및, 고유벡터행렬이고, $E = D^{-1/2} \Gamma$ 이다. (증명은 부록 참조).

한편 식(3.1)의 MPEMG 알고리즘을 다음과 같이

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{P - \lambda K\}^{-1} \{D^{10} Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\} \quad (3.3)$$

나타낸다. 단, $D^2 J(\theta^n) = K$, $D^{20} Q(\theta^n | \theta^n) = P$, K 는 대칭행렬 이고, P 는 대각행렬이다.

정리 1. 식(3.3)의 MPEMG 알고리즘은 $\lambda > 0$ 에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \{H(I - \lambda \Lambda)^{-1} H\} \{D^{10} Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda DJ(\theta^n)\}. \quad (3.4)$$

단, I 는 단위행렬, Γ 와 Λ 는 각각 행렬 $P^{-1/2} K P^{-1/2}$ 의 직교분해에서 얻어진 고유치들로 이루어진 대각 및 고유벡터행렬 이고, $H = P^{-1/2} \Gamma$ 이다.(증명은 부록 참조).

식 (3.4)의 알고리즘에서 주목할 것은 역행렬에 비해 각 성분이 빠져있어 식 (3.1)에서의 계산상의 문제점이 해결된다는 것이다.

다음은 MPEMG 알고리즘의 수렴성질을 살펴보자. 완전자료 x 에 대한 불완전자료 y 의 조건부일도를 $h(y|x, \theta^n)$ 하면 식(3.5)과 같은 관계가 성립한다.

$$Q_P(\theta | \theta^n) = L_P(\theta) + H(\theta | \theta^n). \quad (3.5)$$

여기서, $D^2 L(\theta^n)$ 을 음정치행렬, $D^{20} H(\theta^n | \theta^n)$ 과 $D^2 J(\theta^n)$ 을 각각 음반정치 및 비음정치행렬이라 하면, 식 (3.5)의 관계로부터 $D^{20} Q(\theta^n | \theta^n)$ 은 음정치 행렬임을 알 수 있다. 그리고 모두는 같은 차수의 대칭행렬이다.

정리 2. MPEMG 알고리즘 모든 $\lambda > 0$ 에 대해 $L_p(\theta^{n+1}) > L_p(\theta^n)$ 을 만족한다. (증명은 부록 참조).

이것은 MPEMG 알고리즘은 $\lambda \in [0, \infty)$ 에 관계없이 페널티 대수우도를 증가시킨다는 것이다.

정리 3. 만약 $a \neq 0$ 어떤 벡터가 존재하면 OSL 알고리즘은 $\theta = \theta^n$ 에서 $DL_p(\theta^n) > 0$ 을 만족하는 λ 의 범위는 다음과 같다. (증명은 부록 참조).

$$0 < \lambda \leq - \frac{a^T \{D^{20} H(\theta^n | \theta^n)\} a}{a^T D^2 K \theta^n a}$$

정리2에서 보였듯이 MPEMG 알고리즘은 $\lambda > 0$ 인 모든 영역에서 알고리즘이 수렴하므로, 평활상수 λ 를 증가시키면서 여러 번의 시행착오적 실험을 통해 최적의 화상을 결정하는 화상복원에서는 보다 중요한 의미를 갖게 된다. 그러나 OSL 알고리즘은 정리3에서 나타나듯이 알고리즘이 수렴하는 λ 의 범위가 제한적이다. 이 사실은 잡음이 많은 오염된 화상인 경우의 복원에는 OSL 알고리즘은 사용될 수 없음을 의미한다.

4. 디지털 화상복원 시뮬레이션

이 절에서는 디지털화상실험을 통해 OSL 알고리즘이 잡음에 오염된 화상에 대해 평활 한계성을 갖는 반면, MPEMG 알고리즘은 이것을 극복하는 방안을 보이는 것이다.

과 같이 정의한다. 그러면, 평가함수의 헤이지안 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D^{20} Q(\theta^n | \theta^n) = \text{diag} \left\{ \sum_{j=1}^N p_j h_{ij}^2 ; j=1, 2, \dots, P \right\} \quad (4.2)$$

한편, 페널티 함수의 2차 미분인 $D^2 J(\theta^n) = \partial^2 J(\theta^n) / \partial \theta_j \partial \theta_k$ 은

$$D^2 J(\theta^n) = \left\{ \sum_{k \neq j} [1 - \tanh^2(\theta_j^n - \theta_k^n)] ; j=1, 2, \dots, P \right\} \quad (4.3)$$

대칭이며 비음정치행렬이 된다. 결국, MPEMG 알고리즘을 이용한 디지털 화상복원 식은

$$\begin{aligned} \theta_j^{n+1} = & \theta_j^n + \\ & \left\{ \sum_{i=1}^N p_i h_{ij}^2 + \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{k \neq j} [1 - \tanh^2(\theta_j^n - \theta_k^n)] \right\}^{-1} \\ & \cdot \left\{ \sum_{i=1}^N h_{ij} R_i^{(n)} - \sigma^{2(n)} \lambda \sum_{k \neq j} \tanh(\theta_j^n - \theta_k^n) \right\} \\ & j = 1, 2, \dots, P \end{aligned} \quad (4.4)$$

과 같다. 여기서, R_i 는 n 번째 단계에서 i 번째 관측화소의 잔차를 의미하고, $\sigma^{2(n)}$ 은 n 번째 단계에서 σ^2 의 추정치를 나타낸다. 따라서 보조정리 1을 사용한 정리 1을 이용하면 식(4.4)를 비교적 간편하게 구할 수 있다.

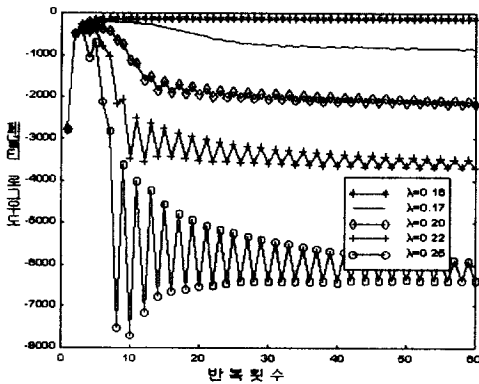
(그림 2)의 (가), (나), (다)은 $\sigma = 0.09$ 인 오염화상에 대해 각각 OSL 및 MPEMG 알고리즘으로 복원한 화상이다. 이 오염화상에 대해 OSL 알고리즘은 대략 $\lambda \in [0, 0.16]$ 내에서만 사용이 가능하다. 즉 최대 $\lambda \approx 0.16$ 까지의 평활만 허용하며, 그 이상의 평활상수에 대해서는 페널티대수우도의 단조증가성이 파괴되면서 (그림 2)의 (나)처럼 발산하게 된다. 반면에 MPEMG 알고리즘을 사용하면 $\lambda=0.20$ 에 대해서도 복원이 가능하다<그림 2,3참조>. 한편, 잡음이 상대적으로 심한 경우인 $\sigma = 0.25$ 일 때의 화상의 복원에는 MPEMG 알고리즘이 확실히 설득력을 갖는다. OSL 알고리즘은 약 $\lambda < 0.07$ 이내에서만 사용할 수 있기 때문에 잡음이 충분히 평활 되지 못한 화상을 제공할 수 밖에 없고, $\lambda = 0.19$ 을 부여하면 발산된 화상을 나타낸다. 이때, MPEMG 알고리즘을 이용하면, $\lambda = 0.19$

(그림 1) (가) 진화상,
(나) 퍼짐+잡음: $\sigma = 0.09$ 로 오염된 화상,
(다) 퍼짐+잡음: $\sigma = 0.25$ 로 오염된 화상

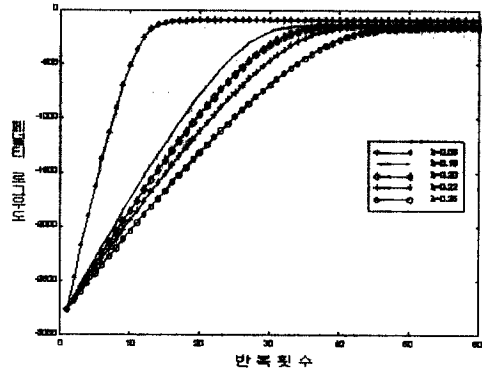
(그림 1)의 (가)은 80×60 크기의 진화상(true image)인데, 반도체 회로의 일부분을 찍은 사진이다. 이때 $P=80 \times 60=4800$ 이다. 그리고 (나)과 (다)은 진화상을 점확산함수(point spread function)로 퍼지게(blurring)한 후, 평균이 0 이고 $\sigma = 0.09$ 및 0.25 인 가우지안 잡음으로 오염시킨 화상이다. 그리고, 페널티 함수는 Green(1990b)에서처럼 $\ln \cosh(r)$ 을 사용하여

$$J(\theta) = \sum_{j=1}^P \sum_{k \neq j} \ln \cosh(\theta_j - \theta_k), j = 1, 2, \dots, P \quad (4.1)$$

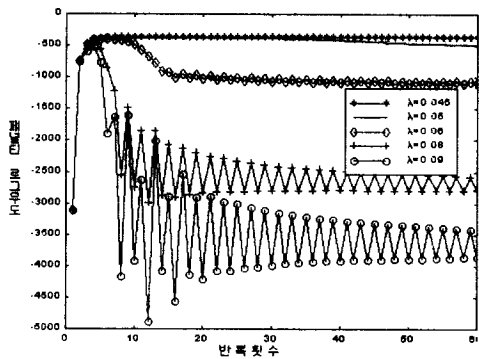
(그림 2) (ㄱ), (ㄴ), (ㄷ)은 $\sigma = 0.09$ 일 때 $\lambda = 0.16$, $\lambda = 0.20$, $\lambda = 0.20$ 에 대한, (ㄹ), (ㅁ), (ㅇ)은 $\sigma = 0.25$ 일 때 $\lambda = 0.05$, $\lambda = 0.22$, $\lambda = 0.22$ 에 대한 복원결과. (ㄱ), (ㄴ), (ㄹ), (ㅁ)은 OSL, (ㄷ)과 (ㅇ)은 MPEMG 알고리즘을 사용한 결과.



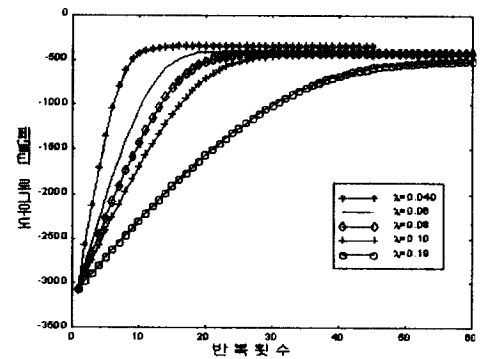
ㄱ) $\sigma = 0.09$ 일 때의 OSL 알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도변화



ㄴ) $\sigma = 0.09$ 일 때의 MPEMG 그라디언트 알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도변화



ㄷ) $\sigma = 0.25$ 일 때의 OSL 알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도변화



ㄹ) $\sigma = 0.25$ 일 때의 MPEMG 알고리즘의 λ 값에 따른 페널티 로그우도변화

(그림 3) 서로 다른 λ 값에서 알고리즘의 반복에 대한 페널티 대수우도의 수렴상태

수준에서의 복원화상을 얻을 수 있다(그림 2, 3 참조). 오염화상에 대한 충분한 잡음제거는 자동인식 분야에서 중요하게 사용되는 경계선추출(edge-extraction)을 위해 반드시 필요하다.

5. 결 론

PEM 알고리즘은 페널티 함수가 초월함수 형태일 때에는 반복알고리즘을 전개할 수 없다. 하지만, OSL 알고리즘은 페널티 함수의 1차미분인 $\partial J(\theta)/\partial \theta$ 항의 전개가능 여부에 관계없이 반복 알고리즘이 유도되며, 이 알고리즘이 수렴할 때는 PEM 알고리즘과 같은 정상점에 수렴한다는 장점 때문에 디지털 화상복원에서 자주 사용된다. 그러나 이러한 장점에도 불구하고, OSL 알고리즘은 평활상수 λ 에 대한 수렴 제한성 때문에 잡음에 대한 평활의 한계를 갖는다. 따라서 OSL 알고리즘은 상대적으로 큰 잡음을 갖는 오염화상에 대해서는 충분한 복원력을 갖지 못한다. 따라서 본 논문에서는 앞서 제기한 OSL 알고리즘의 문제점을 극복하기 위하여 식(3.3)의 MPEMG 알고리즘을 제안하였으며 이 알고리즘의 헤이지안 행렬의 역행렬 계산의 문제점을 극복하기 위하여 보조정리 1을 제안하여 정리 1의 알고리즘을 구성하고 이것을 사용하여 헤이지안 행렬의 역행렬 계산의 어려움을 해결하였다. 또한 이 MPEMG 알고리즘은 페널티함수 $J(\theta)$ 의 2차 미분행렬이 존재하면, OSL 알고리즘의 장점을 그대로 유지하면서 $\lambda > 0$ 의 범위에서 잡음이 큰 오염화상에 대하여 여러 가지 경우의 λ 값을 부여하여 최적의 복원화상을 얻을 수 있었다. 특히 정리 2. 에서 보였듯이 MPEMG 알고리즘은 $\lambda > 0$ 인 모든 영역에서 알고리즘이 수렴하므로, 평활상수 λ 를 증가시키면서 여러 번의 시행착오적 실험을 통해 최적의 화상을 결정하는 화상복원에서 보다 중요한 의미를 갖게 된다

부 록

보조정리 1 증명.

$$\begin{aligned} (A - \lambda B)^{-1} &= A^{-\frac{1}{2}} (I - \lambda A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}})^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \\ &= A^{-\frac{1}{2}} (I - \lambda \Gamma \Lambda \Gamma^T)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \\ &= A^{-\frac{1}{2}} (\Gamma \Gamma - \lambda \Gamma \Lambda \Gamma^T)^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A^{-\frac{1}{2}} (\Gamma^T - \lambda \Gamma \Lambda \Gamma^T)^{-1} \Gamma^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \\ &= A^{-\frac{1}{2}} ((I - \lambda \Lambda) \Gamma^T)^{-1} \Gamma^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \\ &= A^{-\frac{1}{2}} (\Gamma^T)^{-1} (I - \lambda \Lambda)^{-1} \Gamma^{-1} A^{-\frac{1}{2}} \\ &= A^{-\frac{1}{2}} \Gamma (I - \lambda \Lambda)^{-1} \Gamma^T A^{-\frac{1}{2}} \\ &= E (I - \lambda \Lambda)^{-1} E^T \quad (\text{부1.1}) \end{aligned}$$

정리 1 증명.

식 (3.5)에서 $A = P$, $K = B$ 이고 $H = E$ 라 두면 보조정리 1에 의해서 식 (3.6)이 성립한다.

정리 2 증명.

$\theta = \theta^n$ 에서 $L_p(\theta^{n+1})$ 에 대한 Taylor 2차 전개식은

$$\begin{aligned} L_p(\theta^{n+1}) &= L_p(\theta^n) + DL_p(\theta^n)^T r_n + \\ &\quad \left(\frac{1}{2}\right) r_n^T D^2 L_p(\theta^n) r_n + O(\|r_n^T r_n\|) \end{aligned}$$

이다. 여기서, $L_p(\theta^n) \equiv L(\theta^n - \lambda J(\theta^n))$ 이고 $Q_p(\theta^n | \theta^n) \equiv Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda J(\theta^n)$ 이며 $\Delta L_p(\theta^n) \equiv L_p(\theta^{n+1}) - L_p(\theta^n)$ 라 놓자. 그러면,

$$\begin{aligned} \Delta L_p(\theta^n) &= DL_p(\theta^n)^T r_n + \left(\frac{1}{2}\right) r_n^T D^2 L_p(\theta^n) r_n \\ &\quad + O(\|r_n^T r_n\|) \quad (\text{부1.2}) \end{aligned}$$

이다. 따라서, 식 (3.3)의 PEMG 알고리즘은,

$$\begin{aligned} r_n &= -\{D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n) - \lambda D^2 J(\theta^n)\}^{-1} \{D^{10} Q_p(\theta^n | \theta^n) \\ &\quad - \lambda DJ(\theta^n)\} \\ &= -\{D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)\}^{-1} DL_p(\theta^n) \end{aligned}$$

이다. 여기서, $D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n) = D^{20} Q(\theta^n | \theta^n) - \lambda D^2 J(\theta^n)$ 을 나타낸다. 결국,

$$\begin{aligned} \Delta L_p(\theta^n) &\approx -DL_p(\theta^n)^T D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)^{-1} DL_p(\theta^n) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right) DL_p(\theta^n)^T D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)^{-1} \\ &\quad \cdot D^2 L_p(\theta^n) D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)^{-1} DL_p(\theta^n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \{D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)^{-1} DL_p(\theta^n)\}^T \{D^2 L_p(\theta^n) \\ &\quad - 2D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)\} \{D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)^{-1} DL_p(\theta^n)\} \\ &\quad + O(\|r_n^T r_n\|) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right) r_n^T K r_n + O(\|r_n^T r_n\|)$$

이다. 여기서, $r_n = -D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)^{-1} D L_p(\theta^n)$ 이고, $K = D^2 L_p(\theta^n) - 2D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n)$ 이다. 그런데 식 (3.2)의 관계식으로부터,

$$\begin{aligned} K &= D^2 L_p(\theta^n) - 2D^{20} Q_p(\theta^n | \theta^n) \\ &= -D^{20} Q(\theta^n | \theta^n) + \{-D^{20} H(\theta^n | \theta^n) \quad (\text{부1.3}) \\ &\quad + \lambda D^2 J(\theta^n)\} \\ &= -D^{20} Q(\theta^n | \theta^n) + \{-D^{20} H(\theta^n | \theta^n) \\ &\quad + \lambda D^2 J(\theta^n)\} > 0 \end{aligned}$$

가 성립한다. 따라서 $\lambda > 0$ 의 범위에서 $\Delta L_p(\theta^n) > 0$ 을 만족된다.

정리 3 증명.

정리2와 유사한 방법을 사용하면 정리3을 증명할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] Abdalla, M. and Kay, J. , "Edge Preserving Image Restoration, Stochastic Models, Statistical Methods, and Algorithm in Image Analysis," P. Barone et al.(Eds.), Springer-Verlag, pp.1-13, 1990.
 [2] Besag, J. E., "On the Statistical Analysis of Dirty pictures(with discussion)," Journal of Royal Statistical Society B, pp.259-302, 1986.
 [3] Dempster, A. P., Laird N. M., Rubin, D.B., "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm," Journal of Royal Statistical Society

Series B Vol.39, pp.1-38, 1977.

[4] German, S., and German, D., "Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the Bayesian restoration of images," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, pp.721-741, 1984.
 [5] Green, P. J., "On use of the EM Algorithm for Penalized Likelihood Estimation," Journal of Royal Statistical Society B, Vol.52, pp.443-452,1990a.
 [6] Green, P. J., "Bayesian Reconstruction from Emission Tomography data using a Modified EM Algorithm," IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol.9, No.1, pp.84-93, 1990b.
 [7] Jain, A. K., 'Fundamentals of Digital Image Processing,' Prentice-Hall, 1989.
 [8] Lange, K. S., "A Gradient Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm," Journal of Royal Statistical Society B, Vol.57, pp.425-437, 1995.



송 민 구

e-mail : minkoo@cakra.dongguk.ac.kr

1988년 동국대학교 통계학과 졸업

1991년 동국대학교 대학원 통계학과

(이학석사)

1998년 동국대학교 통계학과

(이학박사)

1994년~현재 동국대학교 통계학과, 컴퓨터 정보통신 학부 강사

1998년~현재 주식회사 포시엠 DB 마케팅 연구소 부소장

관심분야 : 통계적 영상처리, 영상재구성, 데이터 마이닝 등