

다각형을 통과하는 곡선의 최적화

추연웅[†] · 구자영^{††}

요약

제어점들이 주어지지 않고 다각형이 주어질 때 그 다각형의 내부를 통과하는 곡선을 생성하는 방법을 제안하였다. 다각형의 볼록 분할을 통해 제어점들을 선정하였으며 곡선 세그먼트의 1차 연속성을 만족시키면서 2차 불연속성을 극소화하는 방법과 점성 저항 하에서 곡선 세그먼트의 1차 연속성을 만족시키면서 소비 에너지를 극소화하는 방법을 제안하였다.

Finding Optimized Curves Passing through a Polygon

Yeon-Woong Choo[†] · Ja Young Koo^{††}

ABSTRACT

Methods of generating curves through a polygon are proposed. One is minimizing the sum of second order discontinuities of curve segments while satisfying the first order continuities. The other is minimizing the energy consumption under the viscosity resistance while satisfying the first order continuities.

1. 서론

곡선 적합은 수치해석이나 컴퓨터 그래픽스 분야에서 오랫동안 다루어진 고전적인 문제로서 부드러운 윤곽선을 다항식으로 표현되는 일련의 곡선 세그먼트들로 나타냄으로써 적은 양의 데이터로 곡선을 표시하는데 유용하다. 로봇의 이동경로 생성이나 글꼴의 윤곽선 설계를 비롯한 많은 응용분야가 있다[1, 2, 3]. 곡선의 적합에 있어서 보통의 경우 제어점들이 주어지고 이 점들을 통과하거나 근사하는 곡선의 다항식 표현을 구하는 것이다[4, 5]. 그러나 본 논문에서는 제어점들이 주어지는 것이 아니고 곡선이 통과해야 할 영역과 평가

함수가 주어질 때의 최적화된 곡선 생성방법을 다루고 있다.

본 논문에서는 3차원 형상으로 표현되는 감시의 사각공간을 벗어나지 않고 통과하는 자동유도 비행체의 궤도 계획 문제의 해결 과정에서, 좀더 단순한 제약 조건인 비행고도가 일정하다는 가정 하에 비행고도의 단면인 2차원 형상 내부의 궤도 생성을 다룬다. 이 문제를 두 부분으로 나누어 먼저 다각형으로 근사화된 2차원 형상의 내부에 제어점들을 선정하고 그 제어점들을 통과하는 곡선들 중 주어진 평가함수를 최적화하는 곡선의 생성방법을 제시한다.

다항식은 3차 다항식이 일반적으로 사용되는데 본 논문에서도 3차 다항식을 사용한다. 비볼록 다각형의 경우 그 내부를 통과하는 3차 다항식이 존재하지 않거나 구하기 어렵기 때문에 본 논문에서는 주어진 다각형을 볼록 다각형으로 분해한 후 곡선이 통과해야 할

* 본 연구는 단국대학교 교내 연구비에 의해 수행되었음.

† 준 회원 : 단국대학교 대학원 전산통계학과

†† 정 회원 : 단국대학교 전산통계학과 교수

논문접수 : 1997년 4월 27일, 심사완료 : 1998년 7월 16일

블록 다각형들을 결정한 다음 각각의 블록 다각형을 통과하는 3차 곡선들을 설정된 비용함수를 극소화하도록 연결하는 방법을 제안한다. 여기서 사용된 비용함수들은 곡선 세그먼트의 연결점에서의 2차 불연속성과 통과 다각형의 내부에 점성이 있는 경우 총 에너지이다.

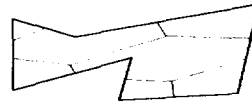
2절에서는 다각형의 분할과 제어점 선택방법을 다루고, 3절에서는 위에 언급한 두 가지 평가함수에 대한 곡선 생성방법을 제안하며, 4절에서는 실험결과를 보이고, 5절에서는 결론을 서술한다.

2. 다각형의 블록 분할과 제어점의 선정

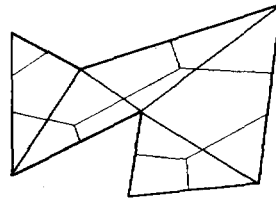
비블록 다각형의 내부를 통과하는 3차 곡선은 존재하지 않거나 구하기 어렵기 때문에 다각형을 블록 다각형으로 분해한 후 각각을 통과하는 3차 곡선을 먼저 구한다. 블록 다각형의 외곽선 상의 임의의 두 점을 지나는 직선은 반드시 다각형 내부를 통과하고, 직선은 3차 곡선의 한 형태이므로 주어진 다각형을 통과하는 일련의 3차 곡선들은 반드시 존재한다.

다각형의 블록 분할을 위해서는 Schachter[6]의 방법을 사용했다. 이 방법은 Voronoi tessellation의 dual인 Delaunay tessellation에 근거한 것이다. Voronoi tessellation은 다각형의 꼭지점을 중심으로 그 점으로부터 가장 가까운 점들의 집합으로 공간을 분할한 것이다(그림 1). 이 때 하나의 영역을 Voronoi cell이라고 하고 인접한 Voronoi cell을 Voronoi neighbour라고 한다. Voronoi neighbour들의 중심들을 연결한 것이 Delaunay tessellation이다(그림 2). 블록 분할은 부분적 Delaunay tessellation을 구하는 것으로서 비블록 꼭지점에서 내각을 분할하여 블록 다각형들로 나누는 것이다. 하나의 비블록 꼭지점 V' 을 분할하는 알고리즘은 다음과 같다.

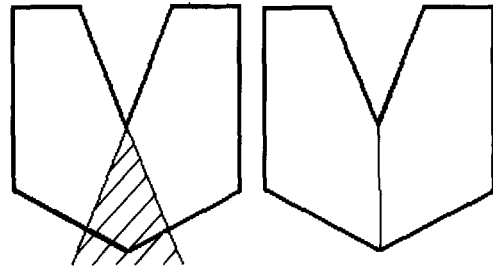
1. V 에 가장 가까운 꼭지점 V' 을 찾는다.
2. V' 이 V 의 inner cone 안에 들어오면 V 와 V' 를 연결하고 return한다.
3. V 에서 출발하는 Delaunay edge들을 구해서 inner cone안에 들어오는 것이 있으면 그 중 하나를 연결하고(그림 3), 그렇지 않으면 inner cone의 좌우에 있는 두 개의 Delaunay edge를 연결한다(그림 4).



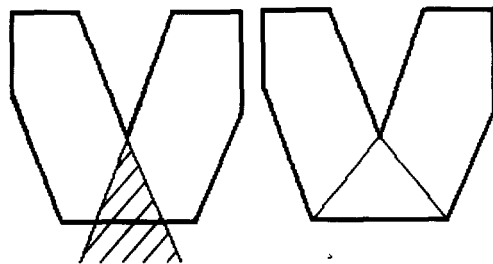
(그림 1) Voronoi tessellation
(Fig. 1) Voronoi tessellation



(그림 2) Delaunay tessellation
(Fig. 2) Delaunay tessellation



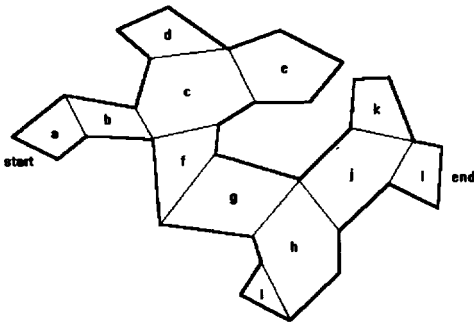
(그림 3) Inner cone 안에 Delaunay edge가 있는 경우
(Fig. 3) A case with a Delaunay edge in the inner cone.



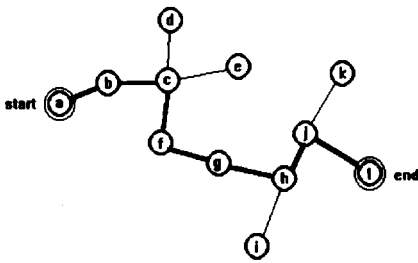
(그림 4) Inner cone 안에 Delaunay edge가 없는 경우
(Fig. 4) A case without a Delaunay edge in the inner cone.

다각형의 블록 분할이 이루어지면 주어진 시점과 종점을 지나는 곡선이 통과해야 하는 블록 다각형의 집합을 구해야 하는데 블록 다각형의 인접 그래프를 작성

하고 시점에 해당하는 노드와 종점에 해당하는 노드를 잇는 최단 경로를 구함으로 이루어진다(그림 5, 그림 6). 최단 경로에 해당하는 노드의 이웃의 개수는 처음과 끝을 제외하면 모두 둘이다. 따라서 이웃하는 블록 다각형과 공유되는 변의 중점을 곡선 세그먼트의 시점과 종점으로 한다.



(그림 5) 블록 분할의 예
(Fig. 5) An example of convex decomposition



(그림 6) 인접 그래프와 최단경로
(Fig. 6) Adjacency graph and the shortest path

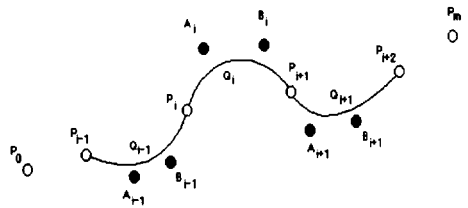
3. 통과 곡선의 최적화

2절까지의 결과로 $P_0 \sim P_m$ 까지의 $m+1$ 개의 제어점이 주어지면 다음으로 할 일은 그 점들을 통과하는 곡선 세그먼트 중에서 다각형을 벗어나지 않으면서 비용 함수를 극소화하는 곡선 세그먼트들의 집합을 구하는 것이다. 본 논문에서는 곡선 세그먼트의 연결점에서 2차 불연속성의 극소화와 점성 저항 하에서 에너지 소비의 극소화라는 두 가지 최적화 방법을 제안한다.

3.1 2차 불연속성의 극소화

2차 연속성을 만족할 때 1차 연속성만을 만족하는 경우보다 접점에서의 곡률 반경이 커지므로 조종이 용이하다. 변위의 2차 미분 값이 가속도이고 그것은 작용하는 힘에 비례한다. 불연속적인 힘은 연속인 경우에 비해 제어하기 어려운 양이 되므로 2차 불연속성이 극소화되는 것이 좋다. 또한 비행체에 카메라가 부착된 경우 얻어지는 영상에서 급격한 움직임(jerky movement)을 방지하기 위해서도 2차 불연속성이 극소화되는 것이 좋다.

주어진 $m+1$ 개의 점으로 이루어지는 m 개의 구간을 Bezier 곡선으로 보간하고, P_i 와 P_{i+1} 사이의 곡선 세그먼트를 $Q_i(t)$ 라고 부를 때 $Q_i(t)$ 의 Bezier 제어점들은 P_i, A_i, B_i, P_{i+1} 이 된다(그림 7).



(그림 7) 제어점들과 곡선 세그먼트들
(Fig. 7) Control points and curve segments

문제는 각 곡선 세그먼트의 접합점에서 1차 연속성을 유지하면서 2차 불연속성이 극소화되도록 각 세그먼트의 A 점들과 B 점들을 구하는 일이다. 세그먼트 Q_{i-1} 과 Q_i 의 1차 미분값이 P_i 에서 연속이 되기 위한 조건은 $A_i - P_i$ 와 $B_{i-1} - P_i$ 가 서로 평행하고 길어도 같다는 것, 즉 $B_{i-1} + A_i = 2P_i$ 이다[7]. A_i 와 B_{i-1} 이 서로 독립적이지 않다는 점을 고려하여 독립변수 r_i 를 $r_i = A_i - P_i$ 로 정의하면,

$$A_i = P_i + r_i, B_{i-1} = P_i - r_i$$

이다.

$$Q_i(t) = [t^3 \ t^2 \ t \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ A_i \\ B_i \\ P_{i+1} \end{bmatrix} \tag{식 1}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \ddot{Q}_{i-1}(t) &= [6t \ 2 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ A_{i-1} \\ B_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix} \\
 &= 6[(-t+1)P_{i-1} + (3t-2)A_{i-1} \\
 &\quad + (-3t+1)(P_i - r_i) + tP_i] \quad (\text{식 2})
 \end{aligned}$$

마찬가지로

$$\ddot{Q}_i(t) = 6[(-t+1)P_i + (3t-2)(P_i + r_i) + (-3t+1)B_i + tP_{i+1}] \quad (\text{식 3})$$

불연속성을 D_i 라고 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D_i &= \ddot{Q}_i(t)|_{t=0} - \ddot{Q}_{i-1}(t)|_{t=0} \\
 &= 6(B_i - 4r_i - A_{i-1}) \quad (\text{식 4})
 \end{aligned}$$

비용함수 J_d 를 불연속 벡터들의 크기의 합으로 하면

$$J_d = \sum_{i=1}^n \|D_i\|^2 \quad (\text{식 5})$$

J_d 를 극소화하기 위해서 J_d 의 r_i 에 대한 Gradient를 구하면

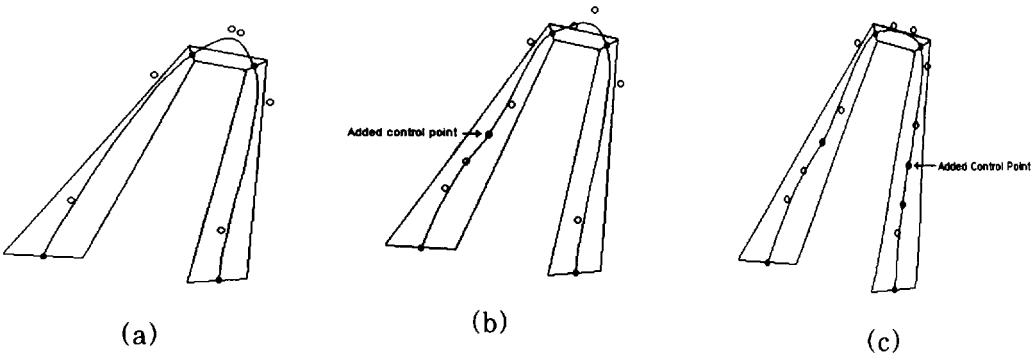
$$\nabla J_d = \frac{\partial J_d}{\partial r_i} = -48(B_i - 4r_i - A_{i-1}) \quad (\text{식 6})$$

따라서 $r_i(t+1) = r_i(t) - \mu \nabla J_d$ 의 반복식에 의해서 극소화할 수 있다.

그러나 이와 같이 구해진 곡선이 다각형을 벗어나면 안되므로 만일 Q_i 가 다각형을 벗어난 경우 Q_i 의 생성에 영향을 주는 제어점 $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$ 로 이루어지는 세 개의 선분 $\overline{P_{i-1}P_i}, \overline{P_iP_{i+1}}, \overline{P_{i+1}P_{i+2}}$ 중 가장 긴 선분의 중점에 새로운 제어점을 삽입한다. 추가적 제어점의 선정 자체가 하나의 최적화 문제가 될 수 있으나 본 논문에서는 강한 제약 조건인 다각형 포함조건을 만족시키면서, 간단한 방법으로 추가된 제어점도 그 이전에 구해진 제어점들과 같이 취급하여 최적화를 적용한다. 이 과정을 모든 곡선 세그먼트들이 다각형을 벗어나지 않을 때까지 반복한다 (그림 8). 이 과정은 알고리즘 MD로 정리된다.

알고리즘 MD

1. $t=0$; 모든를 r_i 0으로 초기화한다.
2. $J_d = \sum_{i=1}^n \|D_i\|^2$ 를 계산한다. $J_d < \epsilon$ 이면 5번으로 간다. 여기서 ϵ 은 주어진 작은 임계값.
3. 모든 i 에 대해서 $r_i(t+1) = r_i(t) + \mu(B_i - 4r_i - A_i)$ 로 갱신한다. 여기서 μ 는 step size를 나타내는 주어진 상수이다.
4. $t=t+1$; 2번으로 간다.
5. 모든 Q_i 들이 다각형을 벗어나지 않으면 종료한다.
6. 벗어나는 Q_i 에 대해서 $\overline{P_{i-1}P_i}, \overline{P_iP_{i+1}},$



(그림 8) 제어점을 추가하여 곡선을 다각형 안으로 한정시키는 과정
 (Fig. 8) A sequence of steps confining the curve segment within the polygon by adding control points.

$\overline{P_{i+1}P_{i+2}}$ 중 가장 긴 선분의 중점에 새로운 제어점을 삽입한다.

7. 1번으로 간다.

위의 알고리즘의 스텝 1에서 r_i 의 초기값이 0 이면 P_i, A_i, B_i, P_{i+1} 을 지나는 곡선이 선분이 되고 전체적으로 polyline이 되며, 이 것은 다각형의 내부를 통과 조건을 만족하는 3차 곡선 세그먼트들의 한 예로서 $r_i(1) = \mu(P_{i+1} - P_i)$ 로 갱신되는 것을 시작으로 계속 갱신된다.

3.2 점성저항 하에서의 에너지 극소화

비행체가 공기 중을 비행할 때 점성 저항에 의한 에너지 소비가 발생하므로 본 절에서는 점성저항에 의한 에너지 소비를 극소화하는 곡선의 생성 방법을 제안한다. 보다 현실에 가까운 해석을 위해서는 항공 동역학적인 요소들을 고려하여야 하겠으나, 본 논문에서는 비행체의 운동을 점성 저항 하에서의 질점의 운동으로 보는 단순한 모델에 대해서 최적화를 적용한다.

점성이 존재하는 공간에서 물체가 이동할 때 소비되는 에너지는 다음과 같다.

$$E = \int_{t_1}^{t_2} (ma - \rho v) \cdot dl = \int_{t_1}^{t_2} (ma - \rho v) \cdot v dt \quad (\text{식 7})$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{Q}(t) - \rho\dot{Q}(t)) \cdot \dot{Q}(t) dt$$

여기서 l_1 과 l_2 는 시점과 종점의 위치이고 t_1 과 t_2 는 그 때의 시간이며, m 은 질량, ρ 는 점성 계수, $a = \ddot{Q}(t)$ 는 가속도, $v = \dot{Q}(t)$ 는 속도이고, \cdot '는 내적 연산자이다.

비용함수 J_E 를 총 소비 에너지라 하면 J_E 는 다음과 같다.

$$J_E = \sum_j E_j \quad (\text{식 8})$$

여기서 E_j 는 j번째 곡선 세그먼트에서의 소비 에너지이다.

J_E 를 극소화하기 위해서 J_E 의 r_i 에 대한 Gra-

dient를 구하면 다음과 같이 계산된다.

$$\nabla J_E = \frac{\partial J_E}{\partial r_i} \quad (\text{식 9})$$

$$= \nabla(E_{i-1} + E_i)$$

$$= \nabla \int_0^1 m\ddot{Q}_{i-1}(t) \cdot \dot{Q}_{i-1}(t) - \rho\dot{Q}_{i-1}(t) \cdot \dot{Q}_{i-1}(t) dt$$

$$+ \nabla \int_0^1 m\ddot{Q}_i(t) \cdot \dot{Q}_i(t) - \rho\dot{Q}_i(t) \cdot \dot{Q}_i(t) dt$$

$$= - \int_0^1 \nabla \| \ddot{Q}_{i-1}(t) \|^2 + \nabla \| \ddot{Q}_i(t) \|^2 dt$$

$$= - \frac{3\rho}{5} [P_{i-1} - r_{i-1} + 8r_i - (P_{i+1} + r_{i+1})]$$

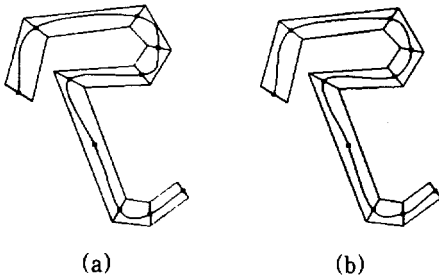
알고리즘 ME

1. $t=0$; 모든 r_i 를 0으로 초기화 한다.
2. $J_E = \sum_{j=1}^n E_j$ 를 계산한다. $J_E < \epsilon$ 이면 5번으로 간다. 여기서 ϵ 은 주어진 작은 임계값.
3. 모든 i 에 대해서 $r_i(t+1) = r_i(t) + \mu [P_{i-1} - r_{i-1} + 8r_i - (P_{i+1} + r_{i+1})]$ 로 갱신한다. 여기서 μ 는 step size를 나타내는 주어진 상수이다.
4. $t=t+1$; 2번으로 간다.
5. 모든 Q_i 들이 다각형을 벗어나지 않으면 종료한다.
6. 벗어나는 Q_i 에 대해서 $\overline{P_{i-1}P_i}, \overline{P_iP_{i+1}}, \overline{P_{i+1}P_{i+2}}$ 중 가장 긴 선분의 중점에 새로운 제어점을 삽입한다.
7. 1번으로 간다.

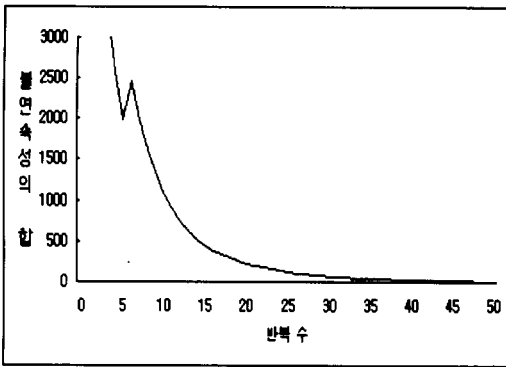
4. 실험 결과

다음은 하나의 다각형 예제에 대하여 위의 알고리즘 MD와 ME를 적용한 결과이다.

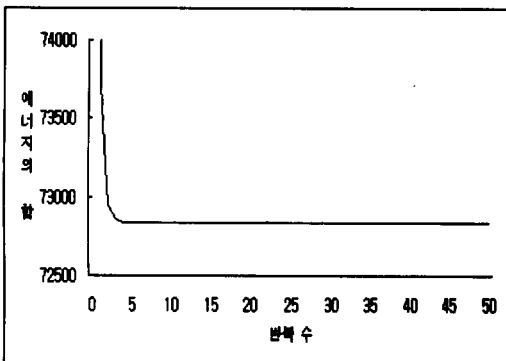
(그림 10)은 알고리즘 MD에서 불연속의 합의 변화 과정을 보인다. (그림 11)은 알고리즘 ME에서 에너지 소비의 변화 과정을 보인다.



(그림 9) 다각형의 내부통과 곡선들 : (a) MD (b) ME
 (Fig. 9) The curves through a polygon : (a) MD (b) ME



(그림 10) 알고리즘 MD에 의한 불연속의 합의 극소화
 (Fig. 10) Minimization of the sum of discontinuities by the algorithm MD



(그림 11) 알고리즘 ME에 의한 에너지 소비의 극소화
 (Fig. 11) Minimization of the energy consumption by the algorithm ME.

5. 결 론

본 논문에서는 주어진 다각형의 내부를 통과하는 최적화된 곡선의 생성방법을 곡선 세그먼트들의 2차 불연속성과 점성 저항 하에서의 에너지 소비라는 두 가지의 비용함수에 대해서 제안하였다. 주어진 다각형을 블록 분할하였고 각 블록 다각형을 통과하는 3차 곡선들의 집합에 대해서 강하기법으로 최적화된 해를 구하였다. 실험의 예에서 보여주는 바와 같이 2차 불연속성의 경우 제안된 알고리즘 MD가, 소비 에너지에 있어서는 제안된 알고리즘 ME가 각기 지역적 최적해를 구함을 보인다.

참 고 문 헌

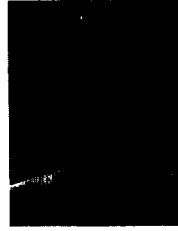
- [1] J. D. Foley, A. Van Dam, 'Fundamentals of Interactive Computer Graphics', Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1982.
- [2] J. D. Foley et al, 'Introduction to Computer Graphics', Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1994.
- [3] Edward Angel, 'Interactive Computer Graphics', Addison-Wesley Longman, Inc., 1997.
- [4] Tony D. DeRose, Brian A. Barsky, "Geometric Continuity, Shape Parameters, and Geometric Constructions for Catmull-Rom Splines", *ACM Trans. on Graphics*, Vol.7, No.1, pp.1-41, Jan. 1988.
- [5] P.Dierckx, "Algorithms for Smoothing Data with Periodic and Parametric Splines", *Computer Graphics and Image Processing* 20, pp.171-184, 1982.
- [6] Bruce Schachter, "Decomposition of Polygons into Convex Sets", *IEEE Trans. on Computers*, Vol. c-27, No.11, pp.1078-1081, 1987.
- [7] David F. Rogers, J. Alan Adams, 'Mathematical Elements for Computer Graphics', 2/E., McGraw-Hill Publishing Company, pp.289-305, 1990.
- [8] Alan Watt, '3D Computer Graphics', 2/E., Addison-Wesley Publishing Company, 1993.



추연웅

- 1990년 2월 단국대학교 계산통계학과(이학사)
- 1992년 2월 단국대학교 대학원 전산통계학과(이학석사)
- 1992년 8월~현재 단국대학교 대학원 전산통계학과 박사과정

관심분야: 컴퓨터 그래픽스, 패턴인식, 얼굴인식,



구자영

- 1977년 2월 서울대학교 전자공학과(공학사)
- 1980년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사)
- 1986년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사)

1986년~현재 단국대학교 전산통계학과 교수

1990년 1월~1991년 1월 영국 Imperial College Visiting Academic

관심분야: 패턴인식, 그래픽스, 영상처리, 얼굴인식